## Sommaire

**Exercice n°1** *Contrôleur des douanes - Branche : opérations commerciales*
*Concours externe - Février 2024*

- $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5} \end{cases}$
- $f(x) = \dfrac{6x+2}{x+5}$

---

**1.** **a.** $f'(x) = \dfrac{6 \times (x+5) - 1 \times (6x+2)}{(x+5)^2} = \dfrac{28}{(x+5)^2} > 0$

Donc, la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

**b.** $x > 2 \iff f(x) > f(2) \iff f(x) > \dfrac{14}{7} \iff f(x) > 2.$

**2.** On pose la propriété $P(n)$ : $u_n > 2$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $u_0 = 8 > 2$

  La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n > 2$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} > 2$.

  $$\begin{aligned} u_n &> 2 \\ f(u_n) &> f(2) \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante} \\ u_{n+1} &> 2 \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ : $u_n > 2$.

▲ Retour Sommaire

**Exercice n°2**

*Contrôleur des douanes - Branche : surveillance*
*Concours externe - Février 2025*

- $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$

---

**1.** **a.** $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times (-1) \times \mathrm{e}^{-x}$
$f'(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x}$
$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$

**b.** $2 > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
Donc, le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $1-x$.

$1 - x \geq 0 \iff -x \geq -1 \iff x \leq 1$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0 \nearrow 2\mathrm{e}^{-1}$ |

**2.** On pose la propriété $P(n)$ : $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

On a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = 2 \times 0{,}1 \times \mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}18$.
Donc, on vérifie que $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 1$.

$$\begin{array}{ccccccccl} 0 & \leqslant & u_n & < & u_{n+1} & \leqslant & 1 & & \\ f(0) & \leqslant & f(u_n) & < & f(u_{n+1}) & \leqslant & f(1) & & \text{car } f \text{ est croissante} \\ 0 & \leqslant & u_{n+1} & < & u_{n+2} & \leqslant & f(1) & & \end{array}$$

On a $f(1) = 2 \times 1 \times \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74$.
Donc $0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant f(1) \leqslant 1$.
$0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 1$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ : $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

▲ Retour Sommaire

**Exercice n°3**

*Contrôleur des finances publiques*
*Concours externe - Janvier 2026*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

---

**1.** $u_1 = \dfrac{3}{4} \times 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}$

$u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{16} - \dfrac{8}{16} = -\dfrac{5}{16}$

$u_3 = \dfrac{3}{4} \times \left(-\dfrac{5}{16}\right) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{15}{64} - \dfrac{32}{64} = -\dfrac{47}{64}$

**2.** On pose la propriété $P(n)$ : $u_{n+1} \leqslant u_n$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{1}{4}$.
  Donc, on vérifie que $u_1 \leqslant u_0$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant u_n \\ \frac{3}{4}u_{n+1} &\leqslant \frac{3}{4}u_n \\ \frac{3}{4}u_{n+1} - \frac{1}{2} &\leqslant \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} \\ u_{n+2} &\leqslant u_{n+1} \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
  La suite $(u_n)$ est décroissante.

▲ Retour Sommaire

**Exercice n°4** *Contrôleur des finances publiques - Janvier 2024*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{3}{4}n + 1 \end{cases}$$

---

On pose la propriété $P(n)$ : $u_n \leqslant n + \dfrac{4}{3}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $u_0 = 1 \leqslant 0 + \dfrac{4}{3}$. Donc, on vérifie que $u_0 \leqslant 0 + \dfrac{4}{3}$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n \leqslant n + \dfrac{4}{3}$.

  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} \leqslant n + 1 + \dfrac{4}{3}$.

$$\begin{aligned}
u_n &\leqslant n + \frac{4}{3} \\
\frac{1}{4} \times u_n &\leqslant \frac{1}{4} \times \left(n + \frac{4}{3}\right) \\
\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}n + 1 &\leqslant \frac{1}{4}\left(n + \frac{4}{3}\right) + \frac{3}{4}n + 1 \\
u_{n+1} &\leqslant \frac{1}{4}n + \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{3} + \frac{3}{4}n + 1 \\
u_{n+1} &\leqslant n + \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

  Or $n + \dfrac{4}{3} \leqslant n + 1 + \dfrac{4}{3}$, donc $u_{n+1} \leqslant n + \dfrac{4}{3} \leqslant n + 1 + \dfrac{4}{3}$.

$$u_{n+1} \leqslant n + 1 + \frac{4}{3}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ : $u_n \leqslant n + \dfrac{4}{3}$.

▲ Retour Sommaire

**Exercice n°5** *Technicien géomètre - Décembre 2024*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

---

On pose la propriété $P(n)$ : $u_n > n^2$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $u_0 = 1 > 0$. Donc, on vérifie que $u_0 > 0^2$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n > n^2$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} > (n+1)^2$.

  $$\begin{aligned} u_n &> n^2 \\ u_n + 2n + 3 &> n^2 + 2n + 3 \\ u_{n+1} &> n^2 + 2n + 1 + 2 \\ u_{n+1} &> (n+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

  Or $(n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$, donc $u_{n+1} > (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$.
  $u_{n+1} > (n+1)^2$
  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ : $u_n > n^2$.

▲ Retour Sommaire

**Exercice n°6** *Technicien géomètre - Décembre 2023*

- $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

---

**1.** $f'(x) = \dfrac{1 \times \ln(x) - x \times \dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$

$(\ln(x))^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $\ln(x) - 1$.

$\ln(x) - 1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 1 \iff \ln(x) \geqslant \ln(\mathrm{e}) \iff x \geqslant \mathrm{e}$

$f(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e})} = \mathrm{e}$

| $x$ | $1$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ | $\searrow$ | $\mathrm{e}$ | $\nearrow$ | |

**2.** On pose la propriété $P(n)$ : $u_n \geqslant \mathrm{e}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $u_0 = 5 \geq \mathrm{e}$.

  La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n \geqslant \mathrm{e}$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} \geqslant \mathrm{e}$.

  $$\begin{aligned} u_n &\geqslant \mathrm{e} \\ f(u_n) &\geqslant f(\mathrm{e}) \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [\mathrm{e}\,;+\infty[ \\ u_{n+1} &\geqslant \mathrm{e} \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ : $u_n \geqslant \mathrm{e}$.

▲ Retour Sommaire