Exercice n°1 *Contrôleur des douanes - Branche : opérations commerciales*
Concours externe - Février 2024

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{6x+2}{x+5}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n+2}{u_n+5} \end{cases}$

1. **a.** Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
b. En déduire que pour tout réel $x>2$, on a $f(x)>2$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n>2$.

Exercice n°2 *Contrôleur des douanes - Branche : surveillance*
Concours externe - Février 2025

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(x)=2x\mathrm{e}^{-x}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Pour l'exercice on considérera que : $\mathrm{e}^{-0{,}1}=0{,}90$ et $\mathrm{e}^{-1}=0{,}37$.

1. **a.** Démontrer pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f'(x)=2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
b. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0\leqslant u_n<u_{n+1}\leqslant 1$.

Exercice n°3 *Contrôleur des finances publiques*
Concours externe - Janvier 2026

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer que cette suite est décroissante.

Exercice n°4 *Contrôleur des finances publiques*
Concours externe - Janvier 2024

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n+\dfrac{3}{4}n+1 \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $u_n\leqslant n+\dfrac{4}{3}$.

Exercice n°5 *Technicien géomètre - Décembre 2024*

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n+2n+3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n>n^2$.

Exercice n°6 *Technicien géomètre - Décembre 2023*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \mathrm{e}$.