

Sommaire

Corrigé 1 - <i>Amérique du Nord J1</i>	21 mai 2025
Corrigé 2 - <i>Amérique du Nord J2</i>	22 mai 2025
Corrigé 3 - <i>Amérique du Nord J2 (secours)</i>	22 mai 2025
Corrigé 4 - <i>Asie J1</i>	11 juin 2025
Corrigé 5 - <i>Asie J2</i>	12 juin 2025
Corrigé 6 - <i>Centres étrangers J1</i>	12 juin 2025
Corrigé 7 - <i>Centres étrangers J2</i>	13 juin 2025
Corrigé 8 - <i>Métropole J1</i>	17 juin 2025
Corrigé 9 - <i>Métropole J2</i>	18 juin 2025
Corrigé 10 - <i>Polynésie J2</i>	18 juin 2025
Corrigé 11 - <i>Polynésie J1</i>	02 septembre 2025
Corrigé 12 - <i>Asie J1</i>	05 septembre 2025
Corrigé 13 - <i>Métropole J1</i>	09 septembre 2025
Corrigé 14 - <i>Métropole J2</i>	10 septembre 2025
Corrigé 15 - <i>Amérique du Sud J1</i>	13 novembre 2025
Corrigé 16 - <i>Amérique du Sud J2</i>	14 novembre 2025
Corrigé 17 - <i>Nouvelle Calédonie J2</i>	21 novembre 2025

Exercice n°1

Amérique du Nord J1 - 21 mai 2025

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : a_n \geq 3n - 1$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

On a $a_1 = 3 \times a_0 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$.

Donc, on vérifie que $a_1 \geq 2$.

Ainsi, la propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $a_n \geq 3n - 1$.

|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1$.

$$a_n \geq 3n - 1$$

$$3 \times a_n \geq 3 \times (3n - 1)$$

$$3a_n - 1 \geq 3(3n - 1) - 1$$

$$a_{n+1} \geq 9n - 4$$

$$a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1 + (6n - 6)$$

Or $n \geq 1$, donc $6n - 6 \geq 0$.

D'où $a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1 + (6n - 6) \geq 3(n+1) - 1$.

$$a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au rang 1 et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $a_n \geq 3n - 1$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°2

Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ (*hypothèse de récurrence*).

• Initialisation :

On a $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,41$.
Donc, on vérifie que $1 \leq u_1 \leq u_0$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

• Hérité :

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ \sqrt{1} &\leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n} \\ 1 &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

• Conclusion :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°3

Amérique du Nord J2 (secours) - 22 mai 2025

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

1. $u_1 = u_{0+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} + \frac{1}{2} \times u_0 = \frac{1}{2}$

2. On pose la propriété $P(n) : u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (hypothèse de récurrence).

• **Initialisation :**

$$u_0 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :**

On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ u_{n+1} &= (1+n) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°4

Asie J1 - 11 juin 2025

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + 0,8u_n \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ (*hypothèse de récurrence*).

• Initialisation :

$$u_1 = 10 - 8 \times 0,8^0 = 2$$

La propriété $P(1)$ est vraie.

• Hérité :

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$.
|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} = 10 - 8 \times 0,8^n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + 0,8u_n \\ &= 2 + 0,8 \times (10 - 8 \times 0,8^{n-1}) \\ &= 2 + 0,8 \times 10 - 0,8 \times 8 \times 0,8^{n-1} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = 10 - 8 \times 0,8^n$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

• Conclusion :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°5

Asie J2 - 12 juin 2025

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \quad \text{avec} \quad u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

$$w_0 = 10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 45$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$$

On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie :

$$w_{n+1} = 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34.$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34\right) + \frac{1}{2}u_n + 7 \\ &= \frac{1}{2} \times 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times 34 + \frac{1}{2}u_n + 7 \\ &= 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + \frac{1}{2} \times \left(20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 7 \\ &= 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 7 \\ &= 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34 \\ &= (10n + 10)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34 \\ w_{n+1} &= 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$.

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°6

Centres étrangers J1 - 12 juin 2025

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$

1. a. $f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{100 - 2x(x+1)}{25(x+1)} = \frac{-2x^2 - 2x + 100}{25(x+1)}$

b. $25(x+1) > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$.

Donc, le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $-2x^2 - 2x + 100$.

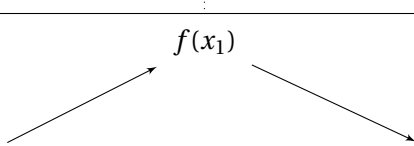
$$a = -2, b = -2, c = 100$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 100 = 804 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{804}}{2 \times (-2)} \approx 6,6 \in] -1 ; +\infty[$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{804}}{2 \times (-2)} \approx -7,6 \notin] -1 ; +\infty[$$

Signe de $f'(x)$: signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 .

x	-1	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(x_1)$ 		

f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$.

2. On pose la propriété $P(n) : 2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$ (hypothèse de récurrence).

• **Initialisation** :

On a $u_0 = 2$ et $u_1 = 4\ln(3) - \frac{4}{25} \approx 4,2$. Donc, on vérifie que $2 \leq u_0 \leq u_1 < 6,5$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité** :

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,5$.

$$\begin{aligned} 2 &\leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5 \\ f(2) &\leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(6,5) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [2 ; 6,5] \\ f(2) &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < f(6,5) \end{aligned}$$

On a $f(2) = 4\ln(3) - \frac{4}{25} \approx 4,2$ et $f(6,5) = 4\ln(7,5) - \frac{6,5^2}{25} \approx 6,4$.

Donc $2 \leq f(2) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < f(6,5) < 6,5$.

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,5$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion** :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

Exercice n°7

Centres étrangers J2 - 13 juin 2025

- $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n \end{cases}$
- $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$

1. $f'(x) = -0,1x + 1,1$

$$\begin{aligned} -0,1x + 1,1 \geq 0 &\iff -0,1x \geq -1,1 \\ &\iff x \leq \frac{-1,1}{-0,1} \\ &\iff x \leq 11 \end{aligned}$$

x	0	11	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$f(11)$	

Donc f est croissante sur $[0; 11]$.

2. On pose la propriété $P(n) : 2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$ (hypothèse de récurrence).

• **Initialisation** :

On a $v_0 = 6$ et $v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = 4,8$.

Donc, on vérifie que $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité** :

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6$.

$$\begin{aligned} 2 &\leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6 \\ f(2) &\leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(6) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [2; 6] \\ 2 &\leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 4,8 \end{aligned}$$

Or $4,8 \leq 6$, donc $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 4,8 \leq 6$.

$$2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion** :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°8

Métropole J1 - 17 juin 2025

- $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n \end{cases}$
- $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$

On pose la propriété $P(n) : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,28$.

Donc, on vérifie que $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$.

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20 \\ h(1) &\leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20) \quad \text{car } h \text{ est croissante} \\ 1,28 &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18 \end{aligned}$$

On a $1 \leq 1,28$ et $18 \leq 20$.

Donc $1 \leq 1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18 \leq 20$.

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°9

Métropole J2 - 18 juin 2025

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1. $w_1 = w_{0+1} = 3w_0 - 2 \times 0 + 3 = 3$

2. On pose la propriété $P(n) : w_n \geq n$ (*hypothèse de récurrence*).

• **Initialisation :**

$$w_0 = 0 \geq 0$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $w_n \geq n$.

|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $w_{n+1} \geq n+1$.

$$\begin{aligned} w_n &\geq n \\ 3 \times w_n &\geq 3 \times n \\ 3w_n - 2n + 3 &\geq 3n - 2n + 3 \\ w_{n+1} &\geq n + 3 \end{aligned}$$

Or $n + 3 \geq n + 1$, donc $w_{n+1} \geq n + 3 \geq n + 1$.

$$w_{n+1} \geq n + 1$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : w_n \geq n$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°10

Polynésie J2 - 18 juin 2025

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$ (*hypothèse de récurrence*).

• Initialisation :

$$p_1 = 0,5 \times 0,8^0 + 0,5 = 1$$

La propriété $P(1)$ est vraie.

• Hérité :

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.
|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $p_{n+1} = 0,5 \times 0,8^n + 0,5$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,8p_n + 0,1 \\ &= 0,8 \times (0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5) + 0,1 \\ &= 0,8 \times 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,8 \times 0,5 + 0,1 \\ &= 0,5 \times 0,8^{n-1+1} + 0,5 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = 0,5 \times 0,8^n + 0,5$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

• Conclusion :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°11

Polynésie J1 - 02 septembre 2025

- $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3) \end{cases}$
- $g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$

1. $g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 3} > 0$ sur $[2; +\infty[$.

Donc, g est croissante sur $[2; +\infty[$.

2. On pose la propriété $P(n) : 4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ (*hypothèse de récurrence*).

• **Initialisation :**

On a $u_0 = 5$ et $u_1 = 2 + \ln(5^2 - 3) = 2 + \ln(22) \approx 5,1$.

Donc, on vérifie que $4 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $4 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$.

$$\begin{aligned} 4 &\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6 \\ g(4) &\leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(6) \quad \text{car } g \text{ est croissante} \\ g(4) &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq g(6) \end{aligned}$$

On a $g(4) = 2 + \ln(13) \approx 4,6 \geq 4$ et $g(6) = 2 + \ln(33) \approx 5,5 \leq 6$.

Donc $4 \leq g(4) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq g(6) \leq 6$.

$$4 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°12

Asie J1 - 05 septembre 2025

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = (1-2x)p_n + x \quad \text{avec } x \in]0;1[. \end{cases}$$

On pose la propriété $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

$$p_1 = \frac{1}{2}(1-2x)^0 + \frac{1}{2} = 1$$

La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On suppose que la propriété } P(n) \text{ est vraie} \quad : \quad p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}. \\ \text{On montre que la propriété } P(n+1) \text{ est vraie} \quad : \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x \\ &= (1-2x) \times \left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2} \right) + x \\ &= (1-2x) \times \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + (1-2x) \times \frac{1}{2} + x \\ &= \frac{1}{2} \times (1-2x)^n + (1-2x) \times \frac{1}{2} + x \\ &= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - 2x \times \frac{1}{2} + x \\ p_{n+1} &= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°13

Métropole J1 - 09 septembre 2025

- $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \sqrt{3x-2}$

1. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	2	$+\infty$

$f(2) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. On pose la propriété $P(n) : 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ (hypothèse de récurrence).

- **Initialisation :**

On a $u_0 = 6$ et $u_1 = 4$.

Donc, on vérifie que $4 \leq u_1 \leq u_0 \leq 6$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6$.

$$\begin{aligned} 2 &\leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6 \\ f(2) &\leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(6) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ 2 &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4 \end{aligned}$$

Or $4 \leq 6$, donc $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4 \leq 6$.

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°14

Métropole J2 - 10 septembre 2025

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : p_n \leq \frac{3}{8}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

$$p_0 = 0 \leq \frac{3}{8}$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $p_n \leq \frac{3}{8}$.
 On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $p_{n+1} \leq \frac{3}{8}$.

$$\begin{aligned} p_n &\leq \frac{3}{8} \\ 0,2 \times p_n &\leq 0,2 \times 0,375 \\ 0,2 \times p_n + 0,3 &\leq 0,2 \times 0,375 + 0,3 \\ p_{n+1} &\leq 0,375 \\ p_{n+1} &\leq \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : p_n \leq \frac{3}{8}$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°15

Amérique du Sud J1 - 13 novembre 2025

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

$$p_1 = 0,125 \times 0,2^0 + 0,875 = 1$$

La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $p_{n+1} = 0,125 \times 0,2^n + 0,875$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 0,2p_n + 0,7 \\ &= 0,2 \times (0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875) + 0,7 \\ &= 0,2 \times 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,2 \times 0,875 + 0,7 \\ &= 0,125 \times 0,2^{n-1+1} + 0,875 \end{aligned}$$

$$p_{n+1} = 0,125 \times 0,2^n + 0,875$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°16

Amérique du Sud J2 - 14 novembre 2025

$$\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : v_n < v_{n+1}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

On a $v_1 = \ln(-1 + 2e^{\ln(4)}) = \ln(-1 + 2 \times 4) = \ln(7)$.

Donc, on vérifie que $v_0 < v_1$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $v_n < v_{n+1}$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $v_{n+1} < v_{n+2}$.

$$\begin{aligned} v_n &< v_{n+1} \\ e^{v_n} &< e^{v_{n+1}} \\ 2 \times e^{v_n} &< 2 \times e^{v_{n+1}} \\ -1 + 2e^{v_n} &< -1 + 2e^{v_{n+1}} \\ \ln(-1 + 2e^{v_n}) &< \ln(-1 + 2e^{v_{n+1}}) \\ v_{n+1} &< v_{n+2} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : v_n < v_{n+1}$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°17

Nouvelle-Calédonie J2 - 21 novembre 2025

- $\begin{cases} u_0 = \ln(9) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$

1. $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 2} > 0$

Donc, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. $f(2\ln(2)) = \ln\left(e^{\frac{2\ln(2)}{2}} + 2\right) = \ln(e^{\ln(2)} + 2) = \ln(2 + 2) = \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$.

3. On pose la propriété $P(n) : 2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$ (hypothèse de récurrence).

- **Initialisation :**

On a $2\ln(2) = \ln(4)$, $u_0 = \ln(9)$ et $u_1 = \ln\left(e^{\frac{\ln(9)}{2}} + 2\right) = \ln(5)$.

Donc, on vérifie que $2\ln(2) \leq u_1 \leq u_0$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $2\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} 2\ln(2) &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ f(2\ln(2)) &\leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ 2\ln(2) &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

▲ [Retour Sommaire](#)