

**Exercice n°1***Amérique du Nord J1 - 21 mai 2025*

On considère la suite numérique  $(a_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n \geq 3n - 1$ .

---

**Exercice n°2***Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025*

On désigne par  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

---

**Exercice n°3***Amérique du Nord J2 (secours) - 22 mai 2025*

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

**1.** Calculer  $u_1$ .

**2.** Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

---

**Exercice n°4***Asie J1 - 11 juin 2025*

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + 0,8u_n \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  strictement positif,

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$$


---

**Exercice n°5***Asie J2 - 12 juin 2025*

Soit  $(w_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases} \text{ avec } u_n = 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Montrer, par récurrence sur  $n$ , que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$


---

**Exercice n°6**

Centres étrangers J1 - 12 juin 2025

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $] -1 ; +\infty[$  par :  $f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

**1. a.** Montrer que  $f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$ .

**b.** Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $[2 ; 6,5]$ .

**2.** Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$ .

---

**Exercice n°7**

Centres étrangers J2 - 13 juin 2025

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$ .

On considère la suite  $(v_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n \end{cases}$$

**1.** Démontrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $[0 ; 11]$ .

**2.** Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$ .

---

**Exercice n°8**

Métropole J1 - 17 juin 2025

On note  $h$  la fonction définie sur  $[0 ; 20]$  par :  $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$ .

On admet que  $h$  est croissante sur  $[0 ; 20]$ .

On désigne par  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$ .

---

**Exercice n°9**

Métropole J2 - 18 juin 2025

On considère la suite  $(w_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \end{cases}$$

**1.** Calculer  $w_1$ .

**2.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n \geq n$ .

---

**Exercice n°10**

Polynésie J2 - 18 juin 2025

Soit la suite  $(p_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$ .

---

**Exercice n°11**

Polynésie J1 - 02 septembre 2025

On considère la fonction  $g$  définie et dérivable sur  $[2; +\infty[$  par :  $g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3) \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction  $g$  est croissante sur  $[2; +\infty[$ .
  2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ .
- 

**Exercice n°12**

Asie J1 - 05 septembre 2025

Soit la suite  $(p_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x \end{cases} \text{ avec } x \in ]0; 1[.$$

Démontrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$


---

**Exercice n°13**

Métropole J1 - 09 septembre 2025

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[2; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $[2; +\infty[$ .
  2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ .
- 

**Exercice n°14**

Métropole J2 - 10 septembre 2025

Soit la suite  $(p_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $p_n \leq \frac{3}{8}$ .

---

**Exercice n°15**

Amérique du Sud J1 - 13 novembre 2025

Soit la suite  $(p_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout naturel  $n \geq 1$ ,  $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$ .

---

**Exercice n°16***Amérique du Sud J2 - 14 novembre 2025*

On considère la suite  $(v_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n < v_{n+1}$ .

---

**Exercice n°17***Nouvelle-Calédonie J2 - 21 novembre 2025*

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \ln(9) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- 1.** Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2.** Montrer que  $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$ .
- 3.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

---