

Sommaire

Corrigé 1 - <i>Amérique du Nord J2</i>	22 mai 2024
Corrigé 2 - <i>Centres étrangers J1</i>	05 juin 2024
Corrigé 3 - <i>Centres étrangers J2</i>	06 juin 2024
Corrigé 4 - <i>Asie J2</i>	11 juin 2024
Corrigé 5 - <i>Métropole J1 (secours)</i>	19 juin 2024
Corrigé 6 - <i>Polynésie J1</i>	19 juin 2024
Corrigé 7 - <i>Métropole J2</i>	20 juin 2024
Corrigé 8 - <i>Métropole J2 (dévoilé)</i>	20 juin 2024
Corrigé 9 - <i>Polynésie J2</i>	20 juin 2024
Corrigé 10 - <i>Polynésie J1</i>	05 septembre 2024
Corrigé 11 - <i>Métropole J1</i>	11 septembre 2024
Corrigé 12 - <i>Métropole J2</i>	12 septembre 2024
Corrigé 13 - <i>Amérique du Sud J1</i>	21 novembre 2024
Corrigé 14 - <i>Amérique du Sud J2</i>	22 novembre 2024

Exercice n°1

Amérique du Nord J2 - 22 mai 2024

- $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
- $g(x) = 2x - x^2$

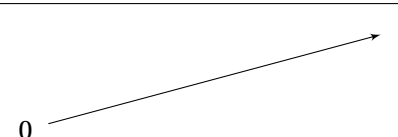
1. $f'(x) = 2 - 2x$

$$2 - 2x \geq 0 \iff -2x \geq -2$$

$$\iff x \leq \frac{-2}{-2}$$

$$\iff x \leq 1$$

x	0	1
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0	1



Donc g est strictement croissante sur $[0; 1]$.

2. On pose la propriété $P(n) : 0 < u_n < u_{n+1} < 1$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

On a $u_0 = 0,5$ et $u_1 = 2 \times 0,5 - 0,5^2 = 0,75$.

Donc, on vérifie que $0 < u_0 < u_1 < 1$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$.

$$\begin{aligned} 0 &< u_n < u_{n+1} < 1 \\ f(0) &< f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ 0 &< u_{n+1} < u_{n+2} < 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°2

Centres étrangers J1 - 05 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = 2xe^{-x}$

1. a. $f'(x) = 2 \times e^{-x} + 2x \times (-1) \times e^{-x}$
 $f'(x) = (2 - 2x) \times e^{-x}$
 $f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$

b. $2 > 0$ et $e^{-x} > 0$.

Donc, le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $1 - x$.

$$1 - x \geq 0 \iff -x \geq -1 \iff x \leq 1$$

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$\frac{2}{e}$

$$f(0) = 0; f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

2. On pose la propriété $P(n) : 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ (*hypothèse de récurrence*).

• **Initialisation :**

On a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 2 \times 0,1 \times e^{-0,1} \approx 0,18$.

Donc, on vérifie que $0 \leq u_0 < u_1 \leq 1$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.

|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n < u_{n+1} \leq 1 \\ f(0) &\leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(1) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ 0 &\leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq f(1) \end{aligned}$$

On a $f(1) = \frac{2}{e} \approx 0,74$.

Donc $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq f(1) \leq 1$.

$$0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°3

Centres étrangers J2 - 06 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$

Donc, f est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. On pose la propriété $P(n) : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

On a $u_0 = 5$ et $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,45$.

Donc, on vérifie que $1 \leq u_1 \leq u_0$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_{n+1} &\leq u_n \\ 2 &\leq u_{n+1} + 1 &\leq u_n + 1 \\ \sqrt{2} &\leq \sqrt{u_{n+1} + 1} &\leq \sqrt{u_n + 1} \\ \sqrt{2} &\leq u_{n+2} &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{2} \approx 1,41$, donc $1 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
 $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°4

Asie J2 - 11 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = x^2 - x \ln(x)$

1. a. $f'(x) = 2x - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x - \ln(x) - 1$

b. $f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$

2. a. $x > 0$, donc le signe de $f''(x)$ ne dépend que de celui de $2x - 1$.

$$2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln(2)$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$			

- b. D'après le tableau des variations de f' ci-dessus, $f'(x) \geq \ln(2)$.
Or $\ln(2) \approx 0,7 > 0$ donc $f'(x) > 0$.
Donc la fonction f est strictement croissante.

3. On pose la propriété $P(n) : \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ (*hypothèse de récurrence*).

• **Initialisation :**

On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,6$.

On vérifie que $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

$$\begin{aligned} 0,5 &\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \\ f(0,5) &\leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ f(0,5) &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1 \end{aligned}$$

Or $f(0,5) \approx 0,6$, donc $0,5 \leq f(0,5) \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$.

$$0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

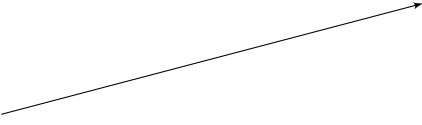
Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Exercice n°5

Métropole J1 (secours) - 19 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$
- $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$

1. a. $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$
- b. $x^2+1 > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$.
 $(x-1)^2 = 0 \iff x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

La fonction f est croissante sur \mathbb{R} .

2. On pose la propriété $P(n) : u_n \geq 0$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

$$u_0 = 7 \geq 0$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n \geq 0$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \\ f(u_n) &\geq f(0) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ u_{n+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : u_n \geq 0$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°6

Polynésie J1 - 19 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \frac{4}{5-x}$

1. $f'(x) = -\frac{4 \times (-1)}{(5-x)^2} = \frac{4}{(5-x)^2} > 0.$

La fonction f est croissante sur $] -\infty ; 5[$.

2. On pose la propriété $P(n) : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ (*hypothèse de récurrence*).

• **Initialisation :**

On a $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{4}{5-3} = 2.$

Donc, on vérifie que $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4.$

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$

|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4.$

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4 \\ f(1) &\leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ 1 &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°7

Métropole J2 - 20 juin 2024

$$\begin{cases} v_0 = 0,7 \\ v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

On a $v_0 = 0,7$ et $v_1 = 0,944$.

Donc, on vérifie que $v_0 \leq v_1 \leq 4$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$.

$$\begin{aligned} v_n &\leq v_{n+1} &&\leq 4 \\ 0,92 \times v_n &\leq 0,92 \times v_{n+1} &&\leq 0,92 \times 4 \\ 0,92 \times v_n + 0,3 &\leq 0,92 \times v_{n+1} + 0,3 &\leq 0,92 \times 4 + 0,3 \\ v_{n+1} &\leq v_{n+2} &&\leq 3,98 \end{aligned}$$

Or $3,98 \leq 4$, donc $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3,98 \leq 4$.

$$v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°8

Métropole J2 (dévoilé) - 20 juin 2024

$$\begin{cases} u_0 = a & \text{avec } 1 < a < 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 & \text{avec } u_n > 1 \end{cases}$$

1. $u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n + \cancel{2} - \cancel{2} = u_n(u_n - 2)$

2. On pose la propriété $P(n) : u_n < 2$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

$$u_0 = a < 2$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n < 2$.

|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} < 2$.

$$\begin{aligned} u_n &< 2 \\ u_n - 2 &< 0 \\ u_n \times (u_n - 2) &< u_n \times 0 \\ u_{n+1} - 2 &< 0 \\ u_{n+1} &< 2 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : u_n < 2$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°9

Polynésie J2 - 20 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

1. $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $x - 1$.

$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

2. On pose la propriété $P(n) : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ (hypothèse de récurrence).

- **Initialisation :**

On a $u_0 = 8$ et $u_1 = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) \approx 7,3$.

Donc, on vérifie que $1 \leq u_1 \leq u_0$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ f(1) &\leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [1; +\infty[\\ 1 + \ln(4) &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Or $1 + \ln(4) \approx 2,4$, donc $1 \leq 1 + \ln(4) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°10

Polynésie J1 - 05 septembre 2024

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{où} \quad u_n = n^2$$

1. D'une part :

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\text{Donc : } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

2. On pose la propriété $P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(hypothèse de récurrence)

- **Initialisation :**

On a $1^2 = 1$.

Par ailleurs, $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$.

La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}.$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

▲ [Retour Sommaire](#)

Exercice n°11

Métropole J1 - 11 septembre 2024

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n} \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : v_n = \frac{n+1}{n}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

$$v_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité** :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On suppose que la propriété } P(n) \text{ est vraie} : v_n = \frac{n+1}{n}. \\ \text{On montre que la propriété } P(n+1) \text{ est vraie} : v_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2 - \frac{1}{v_n} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= 2 - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2n+2-n}{n+1} \\ v_{n+1} &= \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $v_n = \frac{n+1}{n}$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°12

Métropole J2 - 12 septembre 2024

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

On a $p_1 = \frac{1}{3} \approx 0,33$ et $p_2 = \frac{7}{12} \approx 0,58$.

Donc, on vérifie que $p_1 \leq p_2 < \frac{2}{3}$.

Ainsi, la propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.
 On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $p_{n+1} \leq p_{n+2} < \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} p_n &\leq p_{n+1} < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} \times p_n &\leq \frac{1}{4} \times p_{n+1} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\ p_{n+1} &\leq p_{n+2} < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°13

Amérique du Sud J1 - 21 novembre 2024

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \quad \text{avec } v_n > 0 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : v_{n+1} \leq v_n$ (*hypothèse de récurrence*).

• Initialisation :

On a $v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(2) \approx 0,7$.

Donc, on vérifie que $v_1 \leq v_0$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

• Hérité :

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $v_{n+1} \leq v_n$.
|| On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

$$v_{n+1} \leq v_n$$

$$v_{n+1} + 1 \leq v_n + 1$$

$$\ln(v_{n+1} + 1) \leq \ln(v_n + 1)$$

$$v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

• Conclusion :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : v_{n+1} \leq v_n$.

[▲ Retour Sommaire](#)

Exercice n°14

Amérique du Sud J2 - 22 novembre 2024

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n) : 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation :**

On a $u_0 = 10$ et $u_1 = \frac{16}{3} \approx 5,33$.

Donc, on vérifie que $0 \leq u_1 \leq u_0$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

|| On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 || On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ \frac{1}{3} \times 0 &\leq \frac{1}{3} \times u_{n+1} \leq \frac{1}{3} \times u_n \\ 0 + 2 &\leq \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \leq \frac{1}{3}u_n + 2 \\ 2 &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Or $0 \leq 2$, donc $0 \leq 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n : 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

▲ [Retour Sommaire](#)