

Exercice n°1*Amérique du Nord J2 - 22 mai 2024*

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $g(x) = 2x - x^2$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.
Préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.
 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
-

Exercice n°2*Centres étrangers J1 - 05 juin 2024*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(x) = 2xe^{-x}$.

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1.
 - a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $[0; 1]$, $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$.
 - b. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 1]$.
 2. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.
-

Exercice n°3*Centres étrangers J2 - 06 juin 2024*

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}$.

On considère (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
-

Exercice n°4*Asie J2 - 11 juin 2024*

Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - x \ln(x)$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n) \end{cases}$$

1.
 - a. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
 - b. Montrer que : $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$.
 2.
 - a. Dresser le tableau des variations de la fonction f' .
On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de f' .
 - b. En déduire que la fonction f est strictement croissante.
 3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
-

Exercice n°5*Métropole J1 (secours) - 19 juin 2024*

Soit la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$$

1. **a.** Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
 - b.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
 2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
-

Exercice n°6*Polynésie J1 - 19 juin 2024*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 5[$ par : $f(x) = \frac{4}{5-x}$.

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty; 5[$.
 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.
-

Exercice n°7*Métropole J2 - 20 juin 2024*

Soit la suite (v_n) définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 0,7 \\ v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Exercice n°8*Métropole J2 (dévoilé) - 20 juin 2024*

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = a & \text{avec } 1 < a < 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 & \text{avec } u_n > 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n < 2$.
-

Exercice n°9*Polynésie J2 - 20 juin 2024*

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.
 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
-

Exercice n°10

Polynésie J1 - 05 septembre 2024

Soit la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{où} \quad u_n = n^2$$

1. Vérifier que :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice n°11

Métropole J1 - 11 septembre 2024

On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{n+1}{n}$.

Exercice n°12

Métropole J2 - 12 septembre 2024

Soit la suite (p_n) définie par :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

Exercice n°13

Amérique du Sud J1 - 21 novembre 2024

On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \quad \text{avec} \quad v_n > 0 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$.

Exercice n°14

Amérique du Sud J2 - 22 novembre 2024

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.