Sommaire

Exercice n°1

Contrôleur des douanes - Branche : surveillance
Concours externe - Février 2025

- $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$

---

1. $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \\ &\iff x(2\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} &2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\ &e^{-x} = \frac{1}{2} \\ &-x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &x = \ln(2) \approx 0{,}69 \end{aligned}$$

S= $\left\{0\,;\ln(2)\right\}$

2. **a.** $u_n < u_{n+1} \leqslant 1$:
(u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

b.
- f est dérivable, donc continue, sur $[0\,;1]$.
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

D'après la question **1.**, cette équation admet deux solutions : 0 et 1.

Or $u_0 = 0{,}1$ et (u_n) est croissante, donc $u_n \geq 0{,}1$.
Ainsi, $\ell = \ln(2)$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°2 *Technicien géomètre - Décembre 2023*

- $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

---

1. $e \leq u_{n+1} \leq u_n$:
(u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers un réel $\ell \geq e$.

2.
- f est continue sur $[e\,;\,+\infty[$.
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

3.
$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \frac{\ell}{\ln(\ell)} = \frac{\ell}{1} \\ &\iff \ell \times 1 = \ell \times \ln(\ell) \\ &\iff \ell\ln(\ell) - \ell = 0 \\ &\iff \ell(\ln(\ell) - 1) = 0 \end{aligned}$$

$\ell = 0$ ou $\ln(\ell) - 1 = 0$
$\ln(\ell) = \ln(e)$
$\ell = e$

Or $u_n \geq e$, donc $\ell = e$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°3

Geipi Polytech - Avril 2024
Concours d'entrée dans des écoles d'ingénieur

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

---

1. $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$:
(u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite ℓ.

2.
- f est continue sur $[1\,;\,+\infty[$.
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{3x+2}{x+4} = \frac{x}{1} \\ &\iff (3x+2)\times 1 = x \times (x+4) \\ &\iff 3x+2 = x^2+4x \\ &\iff x^2+x-2 = 0 \end{aligned}$$

Polynôme du second degré, de la forme :
$ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=1$ et $c=-2$.

On pose $\Delta = b^2-4ac$.

$$\Delta = 9 > 0 : \; x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -2$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$

Or $u_n \geq 1$, donc $\ell = 1$.

▲ Retour Sommaire