**Exercice n°1**

*Contrôleur des douanes - Branche : surveillance*
*Concours externe - Février 2025*

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

**1.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

**2.** On admet que $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

**a.** Justifier que la suite $(u_n)$ est convergente.

**b.** Démontrer que la limite de la suite $(u_n)$ est $\ln(2)$.

---

**Exercice n°2**

*Technicien géomètre - Décembre 2023*

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On admet que $\mathrm{e} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

**1.** Démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers un réel de l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

**2.** Démontrer que $f(\ell) = \ell$.

**3.** En déduire la valeur de $\ell$.

---

**Exercice n°3**

*Geipi Polytech - Avril 2024*
*Concours d'entrée dans des écoles d'ingénieur*

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ positif par : $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On admet que, pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

**1.** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.

**2.** Déterminer la valeur de $\ell$. Justifier la réponse.

---