Sommaire

Exercice n°1 *Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

1.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x \\ (\sqrt{x})^2 &= x^2 \\ x - x^2 &= 0 \\ x(1-x) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $1 - x = 0$
$x = 1$

S= $\left\{0\,;1\right\}$

2. $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$:
(u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

- Soit f la fonction définie et continue sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

D'après la question **1.**, cette équation admet 2 solutions : 0 et 1.

Or $u_n \geq 1$, donc $\ell = 1$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°2

Centres étrangers J1 - 12 juin 2025

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = 4\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{25}$
- $h(x) = f(x) - x$

---

1. $h(2) = 4\ln(3) - \dfrac{2^2}{25} - 2 \approx 2{,}23$

$h(6{,}5) = 4\ln(7{,}5) - \dfrac{6{,}5^2}{25} - 6{,}5 \approx -0{,}13$

Sur $[m\,;\,6{,}5\,]$:

- h est dérivable donc continue.
- h est décroissante.
- 0 est compris entre $h(m) \approx 2{,}265$ et $h(6{,}5) \approx -0{,}13$.

  D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[m\,;\,6{,}5]$.

Sur $[2\,;\,m]$: $h(x) \geq h(2)$, donc $h(x) \neq 0$.

Ainsi, $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [2\,;\,6{,}5]$.

2. **a.** $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6{,}5$:
(u_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite ℓ.

b.
- f est dérivable, donc continue, sur $[2\,;\,6{,}5]$.
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff h(\ell) = 0$

D'après la question **1.**, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α.

Donc : $\ell = \alpha$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°3 *Centres étrangers J2 - 13 juin 2025*

- $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n \end{cases}$
- $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$

$2 \leq v_{n+1} \leq v_n$:
(v_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

- f (fonction polynôme) est continue sur $[2\,;\,6]$.
- $v_{n+1} = f(v_n)$.
- (v_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff -0{,}05x^2 + 1{,}1x = x \\ &\iff -0{,}05x^2 + 0{,}1x = 0 \\ &\iff x(-0{,}05x + 0{,}1) = 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $-0{,}05x + 0{,}1 = 0$
$x = \dfrac{-0{,}1}{-0{,}05}$
$x = 2$

Or $v_n \geq 2$, donc $\ell = 2$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°4 *Métropole J1 - 17 juin 2025*

- $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n \end{cases}$
- $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$

---

1. $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$:
(u_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite L.

2.
- h (fonction polynôme) est continue sur $[1\,;\,20]$.
- $u_{n+1} = h(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $h(x) = x$.

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff -0{,}02x^2 + 1{,}3x = x \\ &\iff -0{,}02x^2 + 0{,}3x = 0 \\ &\iff x(-0{,}02x + 0{,}3) = 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} &-0{,}02x + 0{,}3 = 0 \\ &x = \frac{-0.3}{-0{,}02} \\ &x = 15 \end{aligned}$$

Or $u_n \geq 1$, donc $L = 15$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°5 *Polynésie J1 - 02 septembre 2025*

- $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right) \end{cases}$
- $g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$
- $f(x) = g(x) - x$

---

1. **a.** Sur $[2\,;\,3]$:
$f(x)$ est croissante et $f(2) = 0$, donc $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha = 2$.

Sur $[3\,;\,+\infty[$:

- f est dérivable donc continue.
- f est décroissante.
- 0 est compris entre $f(3) \approx 0{,}79$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

  D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur $[3\,;\,+\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur $[2\,;\,+\infty[$.

b. À l'aide de la calculatrice : $\beta \approx 5{,}164$.

2. **a.** $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$:
(u_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite ℓ.

b.
- g est dérivable, donc continue, sur $[4\,;\,6]$.
- $u_{n+1} = g(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$.

$g(x) = x \iff g(x) - x = 0 \iff f(x) = 0$

Cette équation admet 2 solutions : $\alpha = 2$ et $\beta \approx 5{,}164$.

Or $u_n \geq 4$, donc $\ell = \beta$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°6 *Métropole J1 - 09 septembre 2025*

- $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \sqrt{3x-2}$

---

1. $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$:
(u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

2.
- f est dérivable, donc continue, sur $[2\,;\,6]$.
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\sqrt{3x-2} = x$$
$$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = x^2$$
$$3x-2 = x^2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Polynôme du second degré, de la forme :
$ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
$\Delta = 1 > 0$: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$

Or $u_n \geq 2$, donc : $\ell = 2$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°7 *Nouvelle-Calédonie J2 - 21 novembre 2025*

- $\begin{cases} u_0 = \ln(9) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right)$

---

1. **a.** $X^2 - X - 2 = 0$

Polynôme du second degré, de la forme :
$aX^2 + bX + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -2$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta = 9 > 0$: $X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1$

$X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$

$\mathrm{S}_a = \left\{-1\,;2\right\}$

b. On pose $X = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0$.
$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$ équivaut à $X^2 - X - 2 = 0$.
Or $X > 0$, donc $X = 2$.

$X = 2 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 2 \iff \dfrac{x}{2} = \ln(2) \iff x = 2\ln(2)$

$\mathrm{S}_b = \left\{2\ln(2)\right\}$

c. $f(x) = x \iff \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right) = x$

$\iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2 = \mathrm{e}^x$

$\iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$

Donc : $\mathrm{S}_c = \mathrm{S}_b = \left\{2\ln(2)\right\}$

2. **a.** $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$:
(u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

b.
- f est dérivable, donc continue, sur $[2\ln(2)\,;\,+\infty[$.
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) est convergente.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Donc : $\ell = 2\ln(2)$.

▲ Retour Sommaire