

**Exercice n°1**

Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025

On désigne par  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

1. Résoudre dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  l'équation  $\sqrt{x} = x$ .
2. On admet que  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .  
Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

**Exercice n°2**

Centres étrangers J1 - 12 juin 2025

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ et } 2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5.$$

On considère  $h$  la fonction définie et dérivable sur  $[2; 6,5]$  par  $h(x) = f(x) - x$ .  
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction  $h$  :

$x$	2	$m \approx 2,364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2,265$	$h(6,5)$

1. Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [2; 6,5]$ .
2. a. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ .  
b. Justifier que  $\ell = \alpha$ .

**Exercice n°3**

Centres étrangers J2 - 13 juin 2025

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$ .

On considère la suite  $(v_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n \end{cases}$$

On admet que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$ .  
Montrer que  $(v_n)$  est convergente et calculer sa limite  $\ell$ .

**Exercice n°4**

Métropole J1 - 17 juin 2025

On note  $h$  la fonction définie sur  $[0; 20]$  par :  $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$ .

On désigne par  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge. On note  $L$  sa limite.
2. Justifier que  $L = 15$ .

**Exercice n°5**

Polynésie J1 - 02 septembre 2025

On considère la fonction  $g$  définie et dérivable sur  $[2; +\infty[$  par :  $g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3) \end{cases}$$

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  par  $f(x) = 2 + \ln(x^2 - 3) - x$ .  
On donne le tableau de variations de  $f$  suivant. On ne demande aucune justification.

$x$	2	3	$+\infty$
$f(x)$	0	$\ln(6) - 1$	$-\infty$

1. **a.** Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions sur  $[2; +\infty[$  que l'on notera  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $\alpha < \beta$ .  
**b.** Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\beta$ .
2. On admet que  $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ .  
**a.** Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ .  
**b.** Justifier que  $f(\ell) = 0$  et déterminer  $\ell$ .

**Exercice n°6**

Métropole J1 - 09 septembre 2025

On considère la fonction  $g$  définie et dérivable sur  $[2; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ et } 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

1. Montrer que  $(u_n)$  est convergente.  
On appelle  $\ell$  sa limite.
2. On admet que  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .  
Déterminer la valeur de  $\ell$ .

**Exercice n°7**

Nouvelle-Calédonie J2 - 21 novembre 2025

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \ln(9) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. **a.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $X^2 - X - 2 = 0$ .  
**b.** En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation :  $e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$ .  
**c.** En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = x$ .
2. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$ .  
**a.** Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.  
**b.** Déterminer la limite de  $(u_n)$ .