

## Sommaire

|  |              |
|--|--------------|
| <b>Corrigé 1</b> - <i>Amérique du Nord J2</i>    | 22 mai 2024  |
| <b>Corrigé 2</b> - <i>Centres étrangers J1</i>   | 05 juin 2024 |
| <b>Corrigé 3</b> - <i>Centres étrangers J2</i>   | 06 juin 2024 |
| <b>Corrigé 4</b> - <i>Asie J2</i>                | 11 juin 2024 |
| <b>Corrigé 5</b> - <i>Métropole J1 (secours)</i> | 19 juin 2024 |
| <b>Corrigé 6</b> - <i>Polynésie J1</i>           | 19 juin 2024 |
| <b>Corrigé 7</b> - <i>Métropole J2</i>           | 20 juin 2024 |
| <b>Corrigé 8</b> - <i>Métropole J2 (dévoilé)</i> | 20 juin 2024 |
| <b>Corrigé 9</b> - <i>Polynésie J2</i>           | 20 juin 2024 |

**Exercice n°1***Amérique du Nord J2 - 22 mai 2024*

- $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
- $g(x) = 2x - x^2$

**1.**  $u_n < u_{n+1} < 1$  :  
 $(u_n)$  est croissante et majorée, donc elle est convergente.

**2.**  $\begin{cases} \bullet g \text{ (fonction polynôme) est continue sur } ]0;1[. \\ \bullet u_{n+1} = g(u_n). \\ \bullet (u_n) \text{ est convergente.} \end{cases}$

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $g(x) = x$ .

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff 2x - x^2 = x \\ &\iff x - x^2 = 0 \\ &\iff x(1 - x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - x = 0 \\ x = 1 \end{aligned}$$

Or  $u_0 = 0,5$  et  $(u_n)$  est croissante, donc  $u_n \geq 0,5$ .  
Ainsi,  $\ell = 1$ .

[▲ Retour Sommaire](#)

**Exercice n°2**

Centres étrangers J1 - 05 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = 2xe^{-x}$

**1.**  $f(x) = x \iff 2xe^{-x} = x$   
 $\iff 2xe^{-x} - x = 0$   
 $\iff x(2e^{-x} - 1) = 0$

$x = 0$  ou  $2e^{-x} - 1 = 0$   
 $e^{-x} = \frac{1}{2}$   
 $-x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$   
 $x = \ln(2) \approx 0,69$

$S = \{0; \ln(2)\}$

**2. a.**  $u_n < u_{n+1} \leq 1$  :  
 $(u_n)$  est croissante et majorée, donc elle est convergente.

- b.**  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ est dérivable, donc continue, sur } [0;1]. \\ \bullet u_{n+1} = f(u_n). \\ \bullet (u_n) \text{ est convergente.} \end{array} \right.$

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

Or  $u_0 = 0,1$  et  $(u_n)$  est croissante, donc  $u_n \geq 0,1$ .

Ainsi,  $\ell = \ln(2)$ .

[▲ Retour Sommaire](#)

**Exercice n°3**

Centres étrangers J2 - 06 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$

**1.**  $f(x) = x$   
 $\sqrt{x+1} = x$

$$(\sqrt{x+1})^2 = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Polynôme du second degré, de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } a = 1, b = -1 \text{ et } c = -1.$$

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

$$\Delta = 5 > 0 : x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,62 \notin [0; +\infty[$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62 \in [0; +\infty[$$

$$\text{Donc : } \ell = x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**2. a.**  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n :$

$(u_n)$  est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

- b.**  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ est dérivable, donc continue, sur } [1; +\infty[. \\ \bullet u_{n+1} = f(u_n). \\ \bullet (u_n) \text{ est convergente.} \end{array} \right.$

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

$$\text{Ainsi, } \ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

[▲ Retour Sommaire](#)

**Exercice n°4**

Asie J2 - 11 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = x^2 - x \ln(x)$

**1.**  $u_n \leq u_{n+1} \leq 1$  :  
 $u_n$  est croissante et majorée, donc elle est convergente.

**2.**  $\begin{cases} \bullet f \text{ est dérivable, donc continue, sur } [0,5; 1]. \\ \bullet u_{n+1} = f(u_n). \\ \bullet (u_n) \text{ est convergente.} \end{cases}$

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - x \ln(x) = x \\ &\iff x^2 - x \ln(x) - x = 0 \\ &\iff x(x - \ln(x) - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \text{ou} \quad x - \ln(x) - 1 = 0 \\ x - \ln(x) = 1 \\ x = 1 \end{aligned}$$

Or  $u_n \geq 0,5$ , donc  $\ell = 1$ .

[▲ Retour Sommaire](#)

**Exercice n°5**

Métropole J1 (secours) - 19 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$
  - $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$
- 

**1.**  $f(x) = x \iff x - \ln(x^2 + 1) = x$   
 $\iff \ln(x^2 + 1) = 0$   
 $\iff x^2 + 1 = 1$   
 $\iff x = 0$

$$S = \{0\}$$

- 2.**  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ est dérivable, donc continue, sur } \mathbb{R}. \\ \bullet u_{n+1} = f(u_n). \\ \bullet (u_n) \text{ est convergente.} \end{array} \right.$

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

Donc :  $\ell = 0$ .

[▲ Retour Sommaire](#)

**Exercice n°6**

Polynésie J1 - 19 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \frac{4}{5-x}$

**1.**  $f(x) = x \iff \frac{4}{5-x} = \frac{x}{1}$   
 $\iff 4 \times 1 = x \times (5-x)$   
 $\iff 4 = 5x - x^2$   
 $\iff x^2 - 5x + 4 = 0$

Polynôme du second degré, de la forme :  
 $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a = 1$ ,  $b = -5$  et  $c = 4$ .

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

$$\Delta = 9 > 0 : x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4$$

$$S = \{1; 4\}$$

- 2.**  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$  :  
 $u_n$  est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

- $f$  est dérivable, donc continue, sur  $[1; 4]$ .
- $u_{n+1} = f(u_n)$ .
- $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ .

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

Or  $u_0 = 3$  et  $(u_n)$  est décroissante, donc  $u_n \leq 3$ .

Ainsi,  $\ell = 1$ .

[▲ Retour Sommaire](#)

**Exercice n°7**

Métropole J2 - 20 juin 2024

$$\begin{cases} v_0 = 0,7 \\ v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3 \end{cases}$$

---

**1.**  $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$  :  
 $(v_n)$  est croissante et majorée, donc elle est convergente.

**2.**  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Soit } f \text{ la fonction définie et continue sur } ]-\infty; 4] \text{ par } f(x) = 0,92x + 0,3. \\ \bullet v_{n+1} = f(v_n). \\ \bullet (v_n) \text{ converge vers une limite } \ell. \end{array} \right.$

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff 0,92\ell + 0,3 = \ell \\ &\iff -0,08\ell + 0,3 = 0 \\ &\iff \ell = \frac{-0,3}{-0,08} \\ &\iff \ell = 3,75 \end{aligned}$$

Donc :  $\ell = 3,75$ .

[▲ Retour Sommaire](#)

**Exercice n°8**

Métropole J2 (dévoilé) - 20 juin 2024

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \end{cases}$$

**1.**  $1 < u_{n+1} \leq u_n$  : $u_n$  est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

**2.**  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Soit } f \text{ la fonction définie et continue sur } ]1; 2[ \text{ par } f(x) = x^2 - 2x + 2. \\ \bullet u_{n+1} = f(u_n). \\ \bullet (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell. \end{array} \right.$

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

$$f(x) = x \iff x^2 - 2x + 2 = x \iff x^2 - 3x + 2 = 0$$

Polynôme du second degré, de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } a = 1, b = -3 \text{ et } c = 2.$$

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

$$\Delta = 1 > 0 : x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$$

 $u_0 = a < 2$  et  $(u_n)$  est décroissante, donc  $u_n < 2$ .Ainsi,  $\ell = 1$ .[▲ Retour Sommaire](#)

**Exercice n°9**

Polynésie J2 - 20 juin 2024

- $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
  - $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$
- 

**1.**  $f(x) = x \iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x$

$$\iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0$$
$$\iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = \ln(1)$$
$$\iff \frac{x}{4} = 1$$
$$\iff x = 4$$

$$S = \{4\}$$

- 2.**  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$  :  
 $(u_n)$  est décroissante et minorée, donc elle converge.

- $f$  est dérivable, donc continue, sur  $[1; +\infty[$ .
- $u_{n+1} = f(u_n)$ .
- $(u_n)$  est convergente.

D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

Donc :  $\ell = 4$ .

[▲ Retour Sommaire](#)