Exercice n°1 *Amérique du Nord J2 - 22 mai 2024*

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $g(x) = 2x - x^2$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

On admet que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

2. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice n°2 *Centres étrangers J1 - 05 juin 2024*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

2. On admet que $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

a. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

b. Démontrer que la limite ℓ de (u_n) est égale à $\ln(2)$.

Exercice n°3 *Centres étrangers J2 - 06 juin 2024*

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}$.

On considère (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Démontrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. On admet que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice n°4 *Asie J2 - 11 juin 2024*

Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par : $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n) \end{cases}$

On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $x - \ln(x) = 1$ et que $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge.

2. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice n°5 *Métropole J1 (secours) - 19 juin 2024*

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. On admet que la suite (u_n) est convergente.
On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice n°6 *Polynésie J1 - 19 juin 2024*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;5[$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4. \end{cases}$

1. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;5[$.

2. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°7 *Métropole J2 - 20 juin 2024*

Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 0{,}7 \\ v_{n+1} = 0{,}92\,v_n + 0{,}3 \quad \text{et} \quad v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4. \end{cases}$

1. Montrer que la suite (v_n) est convergente.

2. Calculer la limite de (v_n).

Exercice n°8 *Métropole J2 (dévoilé) - 20 juin 2024*

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \end{cases}$ avec $1 < a < 2$.

On admet que $1 < u_{n+1} \leqslant u_n < 2$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice n°9 *Polynésie J2 - 20 juin 2024*

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

Soit la suite (u_n)définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. On admet que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Justifier que la suite (u_n) converge. Déterminer la limite ℓ de (u_n).
