Sommaire

Exercice n°1 *Contrôleur des douanes - Branche : opérations commerciales*
Concours externe - Février 2025

- $\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3 \end{cases}$
- $v_n = 60 - u_n$

---

1. **a.** $$\begin{aligned} v_{n+1} &= 60 - u_{n+1} \\ &= 60 - (0{,}95u_n + 3) \\ &= -0{,}95u_n + 57 \\ &= 0{,}95\left(-u_n + \frac{57}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95(-u_n + 60) \\ v_{n+1} &= 0{,}95 \times v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$.

b. $v_0 = 60 - u_0 = 10$

c. $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times 0{,}95^n$

2. $v_n = 60 - u_n \iff u_n = 60 - v_n$

Donc : $u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°2

Contrôleur des douanes - Branche : opérations commerciales
Concours externe - Février 2024

- $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n+2}{u_n+5} \end{cases}$
- $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

---

1. $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+1} = \dfrac{2}{3}$

2.
$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1} \\
&= \frac{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}-2}{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}+1} \\
&= \frac{\dfrac{6u_n+2-2\times(u_n+5)}{u_n+5}}{\dfrac{6u_n+2+u_n+5}{u_n+5}} \\
&= \frac{4u_n-8}{\cancel{u_n+5}} \times \frac{\cancel{u_n+5}}{7u_n+7} \\
&= \frac{4(u_n-2)}{7(u_n+1)} \\
&= \frac{4}{7} \times \frac{u_n-2}{u_n+1} \\
v_{n+1} &= \frac{4}{7} \times v_n
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°3

Contrôleur des finances publiques
Concours externe - Janvier 2024

- $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{3}{4}n + 1 \end{cases}$
- $v_n = u_n - n$

---

1. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ &= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}n + 1 - (n+1) \\ &= \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}n \\ &= \frac{1}{4}(u_n - n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4} \times v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$
et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

2. $v_n = u_n - n \iff u_n = v_n + n$
Or $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$,
donc : $u_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + n$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°4

Geipi Polytech - Avril 2024
Concours d'entrée dans des écoles d'ingénieur

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} \end{cases}$
- $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

---

1. **a.**

$$\begin{aligned}
v_n+1 &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}+2} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n+2-(u_n+4)}{u_n+4}}{\dfrac{3u_n+2+2(u_n+4)}{u_n+4}} \\
&= \frac{2u_n-2}{\cancel{u_n+4}} \times \frac{\cancel{u_n+4}}{5u_n+10} \\
&= \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+2} \\
v_{n+1} &= \frac{2}{5} \times v_n
\end{aligned}$$

Donc : $k = \dfrac{2}{5}$

b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+2} = \dfrac{1}{4}$.

c. $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{v_n}{1} = \frac{u_n-1}{u_n+2} &\iff v_n \times (u_n+2) = (u_n-1) \times 1 \\
&\iff v_n \times u_n + 2 \times u_n = u_n - 1 \\
&\iff u_n v_n - u_n = -1 - 2v_n \\
&\iff u_n(v_n-1) = -1-2v_n \\
&\iff u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n-1} \\
&\iff u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}
\end{aligned}$$

3. $u_n = \dfrac{1+2\times\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1-\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n} = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1-\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

▲ Retour Sommaire