Sommaire

Exercice n°1 *Amérique du Nord J1 - 21 mai 2025*

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n)$: $a_n \geqslant 3n-1$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $a_1 = 3 \times a_0 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$. Donc, on vérifie que $a_1 \geqslant 2$.

  Ainsi, la propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $a_n \geqslant 3n-1$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1$.

  $$\begin{aligned} a_n &\geqslant 3n-1 \\ 3 \times a_n &\geqslant 3 \times (3n-1) \\ 3a_n - 1 &\geqslant 3(3n-1)-1 \\ a_{n+1} &\geqslant 9n-4 \\ a_{n+1} &\geqslant 3(n+1)-1+(6n-6) \end{aligned}$$

  Or $n \geqslant 1$, donc $6n-6 \geqslant 0$.
  D'où $a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+(6n-6) \geqslant 3(n+1)-1$.
  $a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1$.

  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au rang 1 et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $a_n \geqslant 3n-1$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°2 *Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n)$: $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Donc, on vérifie que $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

  $$\begin{array}{ccccc} 1 & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & u_n \\ \sqrt{1} & \leqslant & \sqrt{u_{n+1}} & \leqslant & \sqrt{u_n} \\ 1 & \leqslant & u_{n+2} & \leqslant & u_{n+1} \end{array}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°3 *Amérique du Nord J2 (secours) - 22 mai 2025*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

---

1. $u_1 = u_{0+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} + \frac{1}{2} \times u_0 = \frac{1}{2}$

2. On pose la propriété $P(n)$: $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $u_0 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$

  La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ u_{n+1} &= (1+n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°4 *Asie J1 - 11 juin 2025*

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n)$: $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $u_1 = 10 - 8 \times 0{,}8^0 = 2$

  La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} = 10 - 8 \times 0{,}8^n$.

  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + 0{,}8u_n \\ &= 2 + 0{,}8 \times \left(10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}\right) \\ &= 2 + 0{,}8 \times 10 - 0{,}8 \times 8 \times 0{,}8^{n-1} \\ u_{n+1} &= 10 - 8 \times 0{,}8^n \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°5 *Asie J2 - 12 juin 2025*

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \quad \text{avec} \quad u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n)$: $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $w_0 = 10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 45$

  La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie :
  $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie :
  $w_{n+1} = 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34.$

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \\
&= \frac{1}{2} \times \left(10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34\right) + \frac{1}{2}u_n + 7 \\
&= \frac{1}{2} \times 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times 34 + \frac{1}{2}u_n + 7 \\
&= 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + \frac{1}{2} \times \left(20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 7 \\
&= 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 7 \\
&= 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34 \\
&= (10n + 10)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34 \\
w_{n+1} &= 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34
\end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$

▲ Retour Sommaire

Exercice n°6 — *Centres étrangers J1 - 12 juin 2025*

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = 4\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{25}$

---

1. **a.** $f'(x) = \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{2x}{25} = \dfrac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)} = \dfrac{-2x^2 - 2x + 100}{25(x+1)}$

b. $25(x+1) > 0$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.
Donc, le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $-2x^2 - 2x + 100$.

$a = -2,\ b = -2,\ c = 100$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 100 = 804 > 0$
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - \sqrt{804}}{2 \times (-2)} \approx 6{,}6 \in\ ]-1\,;\,+\infty[$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{804}}{2 \times (-2)} \approx -7{,}6 \notin\ ]-1\,;\,+\infty[$

Signe de $f'(x)$: signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2.

x	-1		x_1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	

f est strictement croissante sur $[2\,;\,6{,}5]$.

2. On pose la propriété $P(n)$: $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6{,}5$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

On a $u_0 = 2$ et $u_1 = 4\ln(3) - \dfrac{4}{25} \approx 4{,}2$. Donc, on vérifie que $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < 6{,}5$.

Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6{,}5$.
On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6{,}5$.

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \leqslant & u_n & \leqslant & u_{n+1} & < & 6{,}5 \\ f(2) & \leqslant & f(u_n) & \leqslant & f(u_{n+1}) & < & f(6{,}5) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ f(2) & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & u_{n+2} & < & f(6{,}5) \end{array}$$

Or $f(2) = 4\ln(3) - \dfrac{4}{25} \approx 4{,}2$ et $f(6{,}5) = 4\ln(7{,}5) - \dfrac{6{,}5^2}{25} \approx 6{,}4$.

Donc $2 \leqslant f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < f(6{,}5) < 6{,}5$.
$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6{,}5$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6{,}5$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°7 *Centres étrangers J2 - 13 juin 2025*

- $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n \end{cases}$
- $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$

---

1. $f'(x) = -0{,}1x + 1{,}1$

$$\begin{aligned} -0{,}1x + 1{,}1 \geqslant 0 &\iff -0{,}1x \geqslant -1{,}1 \\ &\iff x \leqslant \frac{-1{,}1}{-0{,}1} \\ &\iff x \leqslant 11 \end{aligned}$$

x	0		11		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(11)$	$\searrow$	

Donc f est croissante sur $[0\,;\,11]$.

2. On pose la propriété $P(n)$: $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $v_0 = 6$ et $v_1 = -0{,}05 \times 6^2 + 1{,}1 \times 6 = 4{,}8$. Donc, on vérifie que $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6$.
  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$.

  $$\begin{array}{rcccccl} 2 & \leqslant & v_{n+1} & \leqslant & v_n & \leqslant & 6 \\ f(2) & \leqslant & f(v_{n+1}) & \leqslant & f(v_n) & \leqslant & f(6) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [2\,;6] \\ 2 & \leqslant & v_{n+2} & \leqslant & v_{n+1} & \leqslant & 4{,}8 \end{array}$$

  Or $4{,}8 \leqslant 6$, donc $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 4{,}8 \leqslant 6$.
  $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$

  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°8 *Métropole J1 - 17 juin 2025*

- $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n \end{cases}$
- $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$

On pose la propriété $P(n)$: $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}28$. Donc, on vérifie que $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 20$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20$.

  $$\begin{array}{rcccccl} 1 & \leqslant & u_n & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & 20 \\ h(1) & \leqslant & h(u_n) & \leqslant & h(u_{n+1}) & \leqslant & h(20) \quad \text{car } h \text{ est croissante} \\ 1{,}28 & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & u_{n+2} & \leqslant & 18 \end{array}$$

  Or $1 \leqslant 1{,}28$ et $18 \leqslant 20$.
  Donc $1 \leqslant 1{,}28 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 18 \leqslant 20$.
  $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20$

  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°9 *Métropole J2 - 18 juin 2025*

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \end{cases}$$

---

1. $w_1 = w_{0+1} = 3w_0 - 2 \times 0 + 3 = 3$

2. On pose la propriété $P(n)$: $w_n \geqslant n$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $w_0 = 0 \geqslant 0$

  La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $w_n \geqslant n$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $w_{n+1} \geqslant n+1$.

$$\begin{aligned} w_n &\geqslant n \\ 3 \times w_n &\geqslant 3 \times n \\ 3w_n - 2n + 3 &\geqslant 3n - 2n + 3 \\ w_{n+1} &\geqslant n + 3 \end{aligned}$$

  Or $n+3 \geqslant n+1$, donc $w_{n+1} \geqslant n+3 \geqslant n+1$.
  $w_{n+1} \geqslant n+1$

  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $w_n \geqslant n$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°10 *Polynésie J2 - 18 juin 2025*

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}1 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n)$: $p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $p_1 = 0{,}5 \times 0{,}8^0 + 0{,}5 = 1$

  La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $p_{n+1} = 0{,}5 \times 0{,}8^n + 0{,}5$.

  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}8p_n + 0{,}1 \\ &= 0{,}8 \times (0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5) + 0{,}1 \\ &= 0{,}8 \times 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}8 \times 0{,}5 + 0{,}1 \\ &= 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1+1} + 0{,}5 \\ u_{n+1} &= 0{,}5 \times 0{,}8^n + 0{,}5 \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°11 *Polynésie J1 - 02 septembre 2025*

- $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right) \end{cases}$
- $g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$

---

1. $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 3} > 0$ sur $[2\,;\,+\infty]$.

Donc, g est croissante sur $[2\,;\,+\infty]$.

2. On pose la propriété $P(n)$: $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $u_0 = 5$ et $u_1 = 2 + \ln\left(5^2 - 3\right) = 2 + \ln(22) \approx 5{,}1$.
  Donc, on vérifie que $4 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6$.

  $$\begin{array}{ccccccc} 4 & \leqslant & u_n & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & 6 \\ g(4) & \leqslant & g(u_n) & \leqslant & g(u_{n+1}) & \leqslant & g(6) \quad \text{car } g \text{ est croissante} \\ g(4) & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & u_{n+2} & \leqslant & g(6) \end{array}$$

  Or $g(4) = 2 + \ln(13) \approx 4{,}6 \geqslant 4$ et $g(6) = 2 + \ln(33) \approx 5{,}5 \leqslant 6$.
  Donc $4 \leqslant g(4) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant g(6) \leqslant 6$.
  $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6$

  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$

▲ Retour Sommaire

Exercice n°12 — *Asie J1 - 05 septembre 2025*

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = (1-2x)p_n + x \quad \text{avec } x \in]0\,;1[. \end{cases}$$

On pose la propriété $p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $p_1 = \dfrac{1}{2}(1-2x)^0 + \dfrac{1}{2} = 1$

  La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $p_{+1} = \dfrac{1}{2}(1-2x)^n + \dfrac{1}{2}$.

  $$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x \\ &= (1-2x) \times \left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \\ &= (1-2x) \times \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + (1-2x) \times \frac{1}{2} + x \\ &= \frac{1}{2} \times (1-2x)^n + (1-2x) \times \frac{1}{2} + x \\ &= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - 2x \times \frac{1}{2} + x \\ p_{n+1} &= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°13   *Métropole J1 - 09 septembre 2025*

- $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \sqrt{3x-2}$

---

1. $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$

x	2 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$

$f(2) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On pose la propriété $P(n)$: $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $u_0 = 6$ et $u_1 = 4$. Donc, on vérifie que $4 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 6$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

  $$\begin{array}{rcccccl} 2 & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & u_n & \leqslant & 6 \\ f(2) & \leqslant & f(u_{n+1}) & \leqslant & f(u_n) & \leqslant & f(6) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ 2 & \leqslant & u_{n+2} & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & 4 \end{array}$$

  Or $4 \leqslant 6$, donc $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4 \leqslant 6$.
  $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$

  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°14 *Métropole J2 - 10 septembre 2025*

$$\begin{cases} p_1 = 0{,}3 \\ p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}3 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n)$: $p_n \leqslant \dfrac{3}{8}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $p_1 = 0{,}3 = \dfrac{3}{10} \leqslant \dfrac{3}{8}$

  La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $p_n \leqslant \dfrac{3}{8}$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $p_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{8}$.

$$\begin{aligned} p_n &\leqslant \frac{3}{8} \\ 0{,}2 \times p_n &\leqslant 0{,}2 \times 0{,}375 \\ 0{,}2 \times p_n + 0{,}3 &\leqslant 0{,}2 \times 0{,}375 + 0{,}3 \\ p_{n+1} &\leqslant 0{,}375 \\ p_{n+1} &\leqslant \frac{3}{8} \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $p_n \leqslant \dfrac{3}{8}$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°15 *Amérique du Sud J1 - 13 novembre 2025*

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7 \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n)$: $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  $p_1 = 0{,}125 \times 0{,}2^0 + 0{,}875 = 1$

  La propriété $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $p_{n+1} = 0{,}125 \times 0{,}2^n + 0{,}875$.

  $$\begin{aligned} p_{n+1} &= 0{,}2p_n + 0{,}7 \\ &= 0{,}2 \times (0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875) + 0{,}7 \\ &= 0{,}2 \times 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}2 \times 0{,}875 + 0{,}7 \\ &= 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1+1} + 0{,}875 \\ u_{n+1} &= 0{,}125 \times 0{,}2^n + 0{,}875 \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°16 *Amérique du Sud J2 - 14 novembre 2025*

$$\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) \end{cases}$$

On pose la propriété $P(n)$: $v_n < v_{n+1}$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $v_1 = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{\ln(4)}\right) = \ln(-1+2\times 4) = \ln(7)$. Donc, on vérifie que $v_0 < v_1$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $v_n < v_{n+1}$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $v_{n+1} < v_{n+2}$.

  $$\begin{aligned} v_n &< v_{n+1} \\ \mathrm{e}^{v_n} &< \mathrm{e}^{v_{n+1}} \\ 2\times e^{v_n} &< -2\times \mathrm{e}^{v_{n+1}} \\ -1+2e^{v_n} &< -1+2\mathrm{e}^{v_{n+1}} \\ \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) &< \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_{n+1}}\right) \\ v_{n+1} &< v_{n+2} \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $v_n < v_{n+1}$.

▲ Retour Sommaire

Exercice n°17 *Nouvelle-Calédonie J2 - 21 novembre 2025*

- $\begin{cases} u_0 = \ln(9) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right)$

---

1. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2} > 0$

Donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(2\ln(2)) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{2\ln(2)}{2}} + 2\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\ln(2)} + 2\right) = \ln(2+2) = \ln(4) = \ln\left(2^2\right) = 2\ln(2)$.

3. On pose la propriété $P(n)$: $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ (*hypothèse de récurrence*).

- **Initialisation** :

  On a $2\ln(2) = \ln\left(2^2\right) = \ln(4)$, $u_0 = \ln(9)$ et $u_1 = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(9)}{2}} + 2\right) = \ln(5)$.
  Donc, on vérifie que $2\ln(2) \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

  Ainsi, la propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie : $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie : $2\ln(2) \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

  $$\begin{array}{rcccl} 2\ln(2) & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & u_n \\ f(2\ln 2) & \leqslant & f(u_{n+1}) & \leqslant & f(u_n) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ 2\ln(2) & \leqslant & u_{n+2} & \leqslant & u_{n+1} \end{array}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et elle est héréditaire.
  Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

▲ Retour Sommaire