

Exercice n°1*Amérique du Nord J1 - 21 mai 2025*

On considère la suite numérique (a_n) définie par :
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq 3n - 1$.

Exercice n°2*Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025*

On désigne par (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Exercice n°3*Amérique du Nord J2 (secours) - 22 mai 2025*

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_1 .

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice n°4*Asie J1 - 11 juin 2025*

On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + 0,8u_n \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$$

Exercice n°5*Asie J2 - 12 juin 2025*

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases} \text{ avec } u_n = 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n , on a :

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

Exercice n°6

Centres étrangers J1 - 12 juin 2025

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par : $f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$.

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. a. Montrer que $f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$.

b. Montrer que f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

Exercice n°7

Centres étrangers J2 - 13 juin 2025

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

On considère la suite (v_n) définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0 ; 11]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Exercice n°8

Métropole J1 - 17 juin 2025

On note h la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par : $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$.

On admet que h est croissante sur $[0 ; 20]$.

On désigne par (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

Exercice n°9

Métropole J2 - 18 juin 2025

On considère la suite (w_n) définie par :
$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1. Calculer w_1 .

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$.

Exercice n°10

Polynésie J2 - 18 juin 2025

Soit la suite (p_n) définie par :
$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.

Exercice n°11

Polynésie J1 - 02 septembre 2025

On considère la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par : $g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$.

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3) \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2; +\infty[$.
 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.
-

Exercice n°12

Asie J1 - 05 septembre 2025

Soit la suite (p_n) définie par :
$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x \end{cases} \text{ avec } x \in]0; 1[.$$

Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

Exercice n°13

Métropole J1 - 09 septembre 2025

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x - 2}$.

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[2; +\infty[$.
 2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.
 3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.
-

Exercice n°14

Métropole J2 - 10 septembre 2025

Soit la suite (p_n) définie par :
$$\begin{cases} p_1 = 0,3 \\ p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n \leq \frac{3}{8}$.

Exercice n°15

Amérique du Sud J1 - 13 novembre 2025

Soit la suite (p_n) définie par :
$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geq 1$, $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.

Exercice n°16*Amérique du Sud J2 - 14 novembre 2025*

On considère la suite (v_n) définie par :
$$\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n < v_{n+1}$.

Exercice n°17*Nouvelle-Calédonie J2 - 21 novembre 2025*

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$.

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \ln(9) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$
