Exercice n°1 *Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025*

On désigne par (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\ln(2) = 2^n \times \ln(u_n)$$

Exercice n°2 *Amérique du Nord J2 (secours) - 22 mai 2025*

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

3. En déduire que $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$.

Exercice n°3 *Asie J2 - 12 juin 2025*

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 30 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10 \end{cases}$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice n°4 *Asie J1 - 05 septembre 2025*

Soit la suite (p_n) définie par : $\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = -0{,}4p_n + 0{,}7 \end{cases}$

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}5$.

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.
On précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n.

Exercice n°5 *Métropole J1 - 09 septembre 2025*

On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n} \end{cases}$

Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose $w_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n - 2}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.
Préciser son premier terme w_0.

2. On admet que, pour tout n entier naturel, $w_n - 1 = \dfrac{1}{v_n - 2}$.
En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

Exercice n°6 *Métropole J2 - 10 septembre 2025*

Soit la suite (p_n) définie par : $\begin{cases} p_1 = 0{,}3 \\ p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}3 \end{cases}$

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - \dfrac{3}{8}$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2.
Préciser son premier terme.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_n = \frac{3}{8}\left(1 - 0{,}2^n\right)$$

Exercice n°7 *Amérique du Sud J2 - 14 novembre 2025*

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln\left(-1 + 2\mathrm{e}^{v_n}\right) \end{cases}$

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = -1 + \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

2. En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n = \ln\left(1 + 3 \times 2^n\right)$.
