Sommaire

Exercice n°1 ▲ Retour Sommaire *Amérique du Nord J2 - 22 mai 2024*

- $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n - u_n^2 \end{cases}$
- $v_n = \ln(1-u_n)$ avec $0 < u_n < 1$.

1. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(1-u_{n+1}) \\ &= \ln\left(1-(2u_n - {u_n}^2)\right) \\ &= \ln\left(1-2u_n + {u_n}^2\right) \\ &= \ln\left((1-u_n)^2\right) \\ &= 2\times\ln(1-u_n) \end{aligned}$$
$v_{n+1} = 2\times v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 2$
et de premier terme $v_0 = \ln(1-u_0) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

2. $v_n = v_0\times q^n = -\ln(2)\times 2^n$

3. $v_n = \ln(1-u_n) \iff \mathrm{e}^{v_n} = 1-u_n \iff u_n = 1-\mathrm{e}^{v_n}$

Donc : $u_n = 1-\mathrm{e}^{-\ln(2)\times 2^n}$.

Exercice n°2 ▲ Retour Sommaire *Centres étrangers J1 bis - 07 juin 2024*

- $\begin{cases} x_1 = 0{,}85 \\ x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4 \end{cases}$
- $u_n = x_n - 0{,}5$

1. $$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - 0{,}5 \\ &= 0{,}2x_n + 0{,}4 - 0{,}5 \\ &= 0{,}2x_n - 0{,}1 \\ &= 0{,}2\left(x_n - \frac{0{,}1}{0{,}2}\right) \\ &= 0{,}2(x_n - 0{,}5) \end{aligned}$$

$u_{n+1} = 0{,}2 \times v_n$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$
et de premier terme $u_1 = x_1 - 0{,}5 = 0{,}35$.

2. $u_n = x_n - 0{,}5 \iff x_n = u_n + 0{,}5$

Or $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0{,}35 \times 0{,}2^{n-1}$,

donc : $x_n = 0{,}35 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}5$.

Exercice n°3 ▲ Retour Sommaire *Asie J2 - 11 juin 2024*

- $\begin{cases} g_1 = 0{,}5 \\ g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2 \end{cases}$
- $v_n = g_n - 0{,}4$

1. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0{,}4 \\ &= 0{,}5g_n + 0{,}2 - 0{,}4 \\ &= 0{,}5g_n - 0{,}2 \\ &= 0{,}5\left(g_n - \frac{0{,}2}{0{,}5}\right) \\ &= 0{,}5(g_n - 0{,}4) \\ v_{n+1} &= 0{,}5 \times v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$
et de premier terme $v_1 = g_1 - 0{,}4 = 0{,}1$.

2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}$

3. $v_n = g_n - 0{,}4 \iff g_n = v_n + 0{,}4$

Donc : $g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.

Exercice n°4 ▲ Retour Sommaire *Métropole J2 (dévoilé) - 20 juin 2024*

- $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \end{cases}$
- $v_n = \ln(u_n - 1)$ avec $u_n > 1$.

1.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^2\right) \\ &= 2 \times \ln(u_n - 1) \end{aligned}$$

$v_{n+1} = 2 \times v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 2$
et de premier terme $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(a - 1)$.

2. $v_n = \ln(u_n - 1) \iff \mathrm{e}^{v_n} = u_n - 1 \iff u_n = \mathrm{e}^{v_n} + 1$

Or $v_n = v_0 \times q^n = \ln(a-1) \times 2^n = 2^n \times \ln(a-1)$,

donc : $u_n = \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} + 1$.

Exercice n°5 ▲ Retour Sommaire *Métropole J1 - 11 septembre 2024*

- $t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18$
- $w_n = t_n - 10$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= t_{n+1} - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 18 - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 8 \\ &= -0{,}8\left(t_n + \frac{8}{-0{,}8}\right) \\ &= -0{,}8(t_n - 10) \end{aligned}$$

$w_{n+1} = -0{,}8 \times w_n$

Donc (w_n) est géométrique (de raison $q = -0{,}8$).

Exercice n°6 ▲ Retour Sommaire *Métropole J2 - 12 septembre 2024*

- $\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{3} \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$
- $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$

1. $$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{4} \times v_n$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$.

2. $u_n = p_n - \dfrac{2}{3} \iff p_n = u_n + \dfrac{2}{3}$

Or $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$,

donc : $p_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$.

Exercice n°7 ▲ Retour Sommaire *Amérique du sud Jour 2 - 22 novembre 2024*

- $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$
- $v_n = u_n - 3$

1. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{1}{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3} \times v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 7$.

2. $v_n = v_0 \times q^n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3. $v_n = u_n - 3 \iff u_n = v_n + 3$

Donc : $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.