Exercice n°1 *Amérique du Nord J1 - 21 mai 2025*

On considère la suite numérique (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 3n - 1$.

Corrigé APMEP cf exo 2

Exercice n°2 *Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025*

On désigne par (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Corrigé APMEP cf exo 2

Exercice n°3 *Amérique du Nord J2 (secours) - 22 mai 2025*

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Corrigé APMEP cf exo 4

Exercice n°4 *Asie J1 - 11 juin 2025*

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$$

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°5 *Asie J2 - 12 juin 2025*

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + \dfrac{1}{2}u_n + 7 \quad \text{avec} \quad u_n = 20 + 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n. \end{cases}$$

Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

Corrigé APMEP cf exo 2

Exercice n°6 *Centres étrangers J1 - 12 juin 2025*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=4\ln(x+1)-\dfrac{x^2}{25}$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1. **a.** Montrer que $f'(x)=\dfrac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}$.

b. Montrer que f est strictement croissante sur $[2\,;\,6{,}5]$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}<6{,}5$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°7 *Centres étrangers J2 - 13 juin 2025*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=-0{,}05x^2+1{,}1x$.

On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0=6 \\ v_{n+1}=-0{,}05v_n^2+1{,}1v_n \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,11]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant 6$.

Corrigé APMEP cf exo 1

Exercice n°8 *Métropole J1 - 17 juin 2025*

On note h la fonction définie sur $[0\,;\,20]$ par : $h(x)=-0{,}02x^2+1{,}3x$.

On désigne par (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=-0{,}02u_n^2+1{,}3u_n \end{cases}$

1. Montrer que la fonction h est croissante sur $[0\,;\,20]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$.

Corrigé APMEP cf exo 4

Exercice n°9 *Métropole J2 - 18 juin 2025*

On considère la suite (w_n)définie par : $\begin{cases} w_0=0 \\ w_{n+1}=3w_n-2n+3 \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $w_n\geqslant n$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°10 *Polynésie J2 - 18 juin 2025*

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} p_1=1 \\ p_{n+1}=0{,}8p_n+0{,}1 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $p_n=0{,}5\times 0{,}8^{n-1}+0{,}5$.

Corrigé APMEP cf exo 1

Exercice n°11 *Polynésie J1 - 02 septembre 2025*

On considère la fonction g définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right) \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°12 *Asie J1 - 05 septembre 2025*

Soit la suite (p_n) définie par : $\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = (1-2x)p_n + x \quad \text{avec } x \in]0\,;1[. \end{cases}$

Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

Corrigé APMEP cf exo 4

Exercice n°13 *Métropole J1 - 09 septembre 2025*

On considère la fonction f définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n + \leqslant 6$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°14 *Métropole J2 - 10 septembre 2025*

Soit la suite (p_n) définie par : $\begin{cases} p_1 = 0{,}3 \\ p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n \leqslant \frac{3}{8}$.

Corrigé APMEP cf exo 1

Exercice n°15 *Amérique du Sud J1 - 13 novembre 2025*

Soit la suite (p_n) définie par : $\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$.

Corrigé APMEP cf exo 1

Exercice n°16 *Amérique du Sud J2 - 14 novembre 2025*

On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n < v_{n+1}$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°17 *Nouvelle-Calédonie J2 - 21 novembre 2025*

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+2\right)$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \ln(9) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

Corrigé APMEP cf exo 3
