Exercice n°1 *Amérique du Nord J2 - 22 mai 2024*

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $g(x) = 2x - x^2$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°2 *Centres étrangers J1 - 05 juin 2024*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,1]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Corrigé APMEP cf exo 2

Exercice n°3 *Centres étrangers J2 - 06 juin 2024*

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}$.

On considère (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Corrigé APMEP cf exo 4

Exercice n°4 *Asie J2 - 11 juin 2024*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n) \end{cases}$

1. **a.** Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.

b. Montrer que : $f''(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.

2. **a.** Dresser le tableau des variations de la fonction f'.
On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de f'.

b. En déduire que la fonction f est strictement croissante.

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Corrigé APMEP cf exo 1

Exercice n°5 *Métropole J1 (secours) - 19 juin 2024*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - x\ln\left(x^2+1\right)$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$

1. **a.** Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°6 *Polynésie J1 - 19 juin 2024*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

Corrigé APMEP cf exo 4

Exercice n°7 *Métropole J2 - 20 juin 2024*

Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 0{,}7 \\ u_{n+1} = 0{,}92\,v_n + 0{,}3 \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

Corrigé APMEP cf exo 2

Exercice n°8 *Métropole J2 (dévoilé) - 20 juin 2024*

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a & \text{avec} \quad 1 < a < 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 & \text{avec} \quad u_n > 1 \end{cases}$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°9 *Polynésie J2 - 20 juin 2024*

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$

Soit la suite (u_n)définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,-\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°10 *Polynésie J1 - 05 septembre 2024*

Soit la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \quad \text{où} \quad u_n = n^2$$

1. Vérifier que :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°11 *Métropole J1 - 11 septembre 2024*

On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°12 *Métropole J2 - 12 septembre 2024*

Soit la suite (p_n) définie par : $\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{3} \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

Corrigé APMEP cf exo 2

Exercice n°13 *Amérique du Sud J1 - 21 novembre 2024*

On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \quad \text{avec } v_n > 0. \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°14 *Amérique du Sud J2 - 22 novembre 2024*

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Corrigé APMEP cf exo 2
