Exercice n°1

Amérique du Nord J2 - 22 mai 2025

On désigne par (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

1. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.

2. On admet que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Corrigé APMEP cf exo 2

Exercice n°2

Centres étrangers J1 - 12 juin 2025

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 4\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{25}$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6{,}5$.

On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;\,6{,}5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2		$m \approx 2{,}364$		$6{,}5$
$h(x)$	$h(2)$	$\nearrow$	$M \approx 2{,}265$	$\searrow$	$h(6{,}5)$

1. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\,;\,6{,}5]$.

2. **a.** Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
b. Justifier que $\ell = \alpha$.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°3

Centres étrangers J2 - 13 juin 2025

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n \end{cases}$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
Montrer que (v_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

Corrigé APMEP cf exo 1

Exercice n°4

Métropole J1 - 17 juin 2025

On note h la fonction définie sur $[0\,;\,20]$ par : $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$.

On désigne par (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n \end{cases}$

On admet que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

2. Justifier que $L = 15$.

Corrigé APMEP cf exo 4

Exercice n°5 *Polynésie J1 - 02 septembre 2025*

On considère la fonction g définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right) \end{cases}$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty]$ par $f(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right) - x$.
On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$			$\ln(6) - 1$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$-\infty$

1. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\,;\,+\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
   b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.
2. On admet que $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.
   a. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
   b. Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°6 *Métropole J1 - 09 septembre 2025*

On considère la fonction g définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x - 2}$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{et} \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n + \leqslant 6. \end{cases}$

1. Montrer que (u_n) est convergente.
   On appelle ℓ sa limite.
2. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
   Déterminer la valeur de ℓ.

Corrigé APMEP cf exo 3

Exercice n°7 *Nouvelle-Calédonie J2 - 21 novembre 2025*

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right)$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \ln(9) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.
   b. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$.
   c. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   a. Montrer que la suite (u_n) converge.
   b. Déterminer la limite de (u_n).

Corrigé APMEP cf exo 3
