EXERCICE N°1
Liban 28 mai

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.
Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin Pour
Afficher v
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	
	Pour i variant de 1 à n faire
	  v prend la valeur 1
	  Afficher v
	  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		  Afficher v
		  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Afficher v
		Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B : Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Aide

EXERCICE N°2
Amérique du Nord 30 mai

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Aide

EXERCICE N°3

Polynésie 7 juin

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Aide

EXERCICE N°4

Centres étrangers 12 juin

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A : Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur … Affecter à n la valeur … Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	…	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C : Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Aide

Exercice n°5

Asie 19 juin

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	Pour i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	Fin Pour

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Aide

EXERCICE N°6

Métropole 20 juin

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n+3.$$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Aide

EXERCICE N°7

Métropole 12 septembre

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Aide

EXERCICE N°8

Nouvelle Calédonie 14 novembre

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Initialisation :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter $K+1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
Sortie :	Afficher U
	Afficher V

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

c. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

Aide

AIDE

Exercice n°1

Liban 28 mai

Sujet

Partie A

1. L'algorithme **n° 3** calcule et affiche tous les termes.

L'algorithme n° 1 n'affiche que le dernier terme.
L'algorithme n° 2 ne calcule que v_1.

2. La suite (v_n) semble croissante et majorée.

3. **a.** • $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$ • $\begin{cases} P_n & : & 0 < v_n < 3 \\ P_0 & : & 0 < v_0 < 3 \\ P_{n+1} & : & 0 < v_{n+1} < 3 \end{cases}$

Démonstration par récurrence

— *Initialisation* :
$v_0 = 1$, c'est-à-dire $0 < v_0 < 3$
Donc P_0 est vraie.

— *Hérédité* :
On suppose que P_n est vraie : $0 < v_n < 3$
Montrons que P_{n+1} est vraie : $0 < v_{n+1} < 3$

$$\begin{aligned} 0 < v_n < 3 &\Longrightarrow 0 > -v_n > -3 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{6-0} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{6-3} \\ &\Longrightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3} \\ &\Longrightarrow 0 < \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

— *Conclusion* :
Par le principe de récurrence, P_n est vraie : $0 < v_n < 3$

b. *Sens de variation de (v_n)*

• $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6-v_n} - v_n = \dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n}$

• $(v_n-3)^2 > 0$
et $6 - v_n > 0$ (car $v_n < 3$)
Donc $v_{n+1} - v_n > 0$, ainsi (v_n) est croissante.

c. (v_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

Partie B

• $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$ • $\begin{cases} w_n & = & \dfrac{1}{v_n-3} \iff w_n \times (v_n-3) = 1 \iff v_n = \dfrac{1}{w_n}+3 \\ w_0 & = & \dfrac{1}{v_0-3} = -\dfrac{1}{2} \\ w_{n+1} & = & \dfrac{1}{v_{n+1}-3} \end{cases}$

Suite arithmétique

1. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{v_{n+1}-3} - w_n = \dfrac{1}{\dfrac{9}{6-v_n}-3} - w_n = \dfrac{1}{\dfrac{9}{6-\left(\dfrac{1}{w_n}+3\right)}-3} - w_n = \cdots = -\dfrac{1}{3}$

Ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$

2.
- $w_n = w_0 + n \times r = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n$
- $v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3 = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n} + 3$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$ *Limite d'une suite*

EXERCICE N°2

Amérique du Nord 30 mai

Sujet

1. **a.** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$

$u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2}$

$u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$

$u_3 = \sqrt{2u_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1{,}8340$

b. Cet algorithme permet de calculer u_n pour n fixé.

c. On peut conjecturer que (u_n) est croissante et majorée.

2. **a.** • $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$ • $\begin{cases} P_n : 0 < u_n \leqslant 2 \\ P_0 : 0 < u_0 \leqslant 2 \\ P_{n+1} : 0 < u_{n+1} \leqslant 2 \end{cases}$

Démonstration par récurrence

— *Initialisation* :
$u_0 = 1$, c'est-à-dire $0 < u_0 \leqslant 2$
Donc P_0 est vraie.

— *Hérédité* :
On suppose que P_n est vraie : $0 < u_n \leqslant 2$
Montrons que P_{n+1} est vraie : $0 < u_{n+1} \leqslant 2$

$0 < u_n \leqslant 2 \Longrightarrow \sqrt{2\times 0} < \sqrt{2\times u_n} \leqslant \sqrt{2\times 2} \Longrightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 2$

Donc P_{n+1} est vraie.

— *Conclusion* :
Par le principe de récurrence, P_n est vraie : $0 < u_n \leqslant 2$

b. *Sens de variation de (u_n)*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{2u_n} - u_n)\times(\sqrt{2u_n} + u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n} \\ &= \frac{2u_n - n^2}{\sqrt{2u_n} + u_n} \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n \times (2 - u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n} \end{aligned}$$

Or $0 < u_n \leqslant 2$
Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
Ainsi (u_n) est croissante.

c. (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente.

3. **a.** • $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$ • $\begin{cases} v_n = \ln u_n - \ln 2 \Longleftrightarrow \ln u_n = v_n + \ln 2 \Longleftrightarrow u_n = \mathrm{e}^{v_n + \ln 2} \\ v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = -\ln 2 \\ v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 \end{cases}$

Suite géométrique

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln u_{n+1} - \ln 2 \\ &= \ln(\sqrt{2u_n}) - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2}\times(\ln 2 + \ln u_n) - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{v_n + \ln 2}\right) - \ln 2 \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
et de premier terme $v_0 = -\ln 2$

b.
- $v_n = v_0 \times q^n = -\ln 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
- $u_n = \mathrm{e}^{v_n + \ln 2} = \mathrm{e}^{-\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ln 2}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \dfrac{1}{2} < 1$ *Limite d'une suite*

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}^{\ln 2} = 2$

d. Algorithme :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1{,}999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n

EXERCICE N°3

Polynésie 7 juin

Sujet

$$\begin{cases} u_0 & = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$$

1. **a.** $u_1 = \dfrac{3\times u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3}{4}$

$u_2 = \dfrac{3\times u_1}{1+2u_1} = \dfrac{9}{10}$

b. $\begin{cases} P_n & : & 0 < u_n \\ P_0 & : & 0 < u_0 \\ P_{n+1} & : & 0 < u_{n+1} \end{cases}$

Démonstration par récurrence

— *Initialisation* :
$u_0 = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $0 < u_0$
Donc P_0 est vraie.

— *Hérédité* :
On suppose que P_n est vraie : $0 < u_n$
Montrons que P_{n+1} est vraie : $0 < u_{n+1}$

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\Longrightarrow 0 < 3u_n \text{ et } 0 < 1+2u_n \\ &\Longrightarrow 0 < \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \\ &\Longrightarrow 0 < u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

— *Conclusion* :
Par le principe de récurrence, P_n est vraie : $0 < u_n$

2. **a.** *Sens de variation de (u_n)*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - u_n \\ &= \dfrac{-2u_n^2 + 2u_n}{1+2u_n} \\ &= \dfrac{2u_n(-u_n+1)}{1+2u_n} \end{aligned}$$

Or, $0 < u_n < 1$
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$
Ainsi, (u_n) est croissante.

b. (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

3. **a.** • $\begin{cases} u_0 & = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$ • $\begin{cases} v_n & = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff u_n = v_n\times(1-u_n) \iff u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n} \\ v_0 & = \dfrac{u_0}{1-u_0} = 1 \\ v_{n+1} & = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \end{cases}$

Suite géométrique

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \dfrac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} \\ &= \dfrac{3u_n}{1-u_n} \\ &= \dfrac{3\times\dfrac{v_n}{1+v_n}}{1-\dfrac{v_n}{1+v_n}} \\ &= \cdots \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$
et de premier terme $v_0 = 1$

b. $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$

c. $u_n = u_n = \dfrac{v_n}{1 + v_n} = \dfrac{3^n}{1+3^n}$

d. $u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n} = \dfrac{3^n \times 1}{3^n \times \left(\dfrac{1}{3^n} + 1\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3^n} + 1}$ *Limite d'une suite*

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car $q = 3 > 1$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice n°4

Centres étrangers 12 juin

Sujet

Partie A : Algorithmique et conjectures

1. Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u_n + 1}{2 \times (n+1)}$

Affecter à n la valeur $n+1$.

2. Ajouter avant Fin Tant que : « Afficher la variable u ».

3. (u_n) semble être décroissante.

Partie B : Étude mathématique

1. • $\begin{cases} u_1 &= \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} &= \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)} \end{cases}$ • $\begin{cases} v_n &= nu_n - 1 \iff u_n = \dfrac{v_n + 1}{n} \\ v_1 &= 1 \times u_1 - 1 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} &= (n+1)u_{n+1} - 1 \end{cases}$

Suite géométrique

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+1)u_{n+1} - 1 \\ &= (n+1) \times \frac{nu_n + 1}{2(n+1)} - 1 \\ &= \cancel{(n+1)} \times \frac{\cancel{n} \times \dfrac{v_n + 1}{\cancel{n}} + 1}{2\cancel{(n+1)}} - 1 \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$

et de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{2}$

2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)$.

$u_n = \dfrac{v_n + 1}{n} = \dfrac{0,5^n + 1}{n}$.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < 0,5 < 1$

Limite d'une suite

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 + 0,5^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1 + 0,5^n}{n}$

Sens de variation de (u_n)

$$\begin{aligned} &= \frac{n \times \left(1 + 0,5^{n+1}\right) - (n+1) \times (1 + 0,5^n)}{n(n+1)} \\ &= \ldots \\ &= \frac{0,5^n \times (n \times 0,5 - n - 1) - 1}{n(n+1)} \\ &= -\left[\frac{0,5^n \times (0,5n + 1) + 1}{n(n+1)}\right] \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$, donc (u_n) est décroissante.

Partie C : Retour à l'algorithmique

- Dans Traitement : remplacer "Tant que $n < 9$ par "Tant que $u \geqslant 0,001$".
- Dans Sortie : remplacer "Afficher la variable u" par "Afficher la variable n".

EXERCICE N°5

Asie 19 juin

Sujet

Partie A

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} \end{cases}$$

1. $\begin{cases} P_n & : & u_n > 1 \\ P_0 & : & u_0 > 1 \\ P_{n+1} & : & u_{n+1} > 1 \end{cases}$

Démonstration par récurrence

— *Initialisation* :
$u_0 = 2$, c'est-à-dire $u_0 > 1$
Donc P_0 est vraie.

— *Hérédité* :
On suppose que P_n est vraie : $u_n > 1$
Montrons que P_{n+1} est vraie : $u_{n+1} > 1$

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\Longrightarrow u_n - 1 > 0 \\ &\Longrightarrow \frac{u_n-1}{u_n+3} > 0 \\ &\Longrightarrow \frac{u_n-1}{u_n+3} + 1 > 1 \\ &\Longrightarrow \frac{2u_n+2}{u_n+3} > 1 \\ &\Longrightarrow \frac{2u_n+2}{u_n+3} + \frac{u_n-1}{u_n+3} > 1 + 0 \\ &\Longrightarrow \frac{3u_n+1}{u_n+3} > 1 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

— *Conclusion* :
Par le principe de récurrence, P_n est vraie : $u_n > 1$

2. **a.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

b. *Sens de variation de (u_n)*

- $u_n > 1 \Longrightarrow \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n} < 0$
  Donc (u_n) est décroissante.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

Partie B

1.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

2. Il semble que la suite converge vers 1.

3. **a.**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \\ &= \frac{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} \\ &= \frac{0,5 - 0,5 \times \dfrac{1+v_n}{1-v_n}}{1,5 + 1,5 \times \dfrac{1+v_n}{1-v_n}} \\ &= \frac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} \end{aligned}$$

$= \ldots$
$= -13 v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{-}{1}3$

et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$

b. On a $v_0 = \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{3}$.

On sait qu'alors pour tout naturel n, $v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. **a.** Quel que soit le naturel n, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 1$, donc $v_n \leqslant \frac{1}{3}$ et par conséquent $v_n \neq 1$.

b. $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff$
$v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \iff u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$ et comme $v_n \neq 1$,
$u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

c. Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, donc d'après le résultat précédent $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

EXERCICE N°6

Métropole 20 juin

Sujet

salut

EXERCICE N°7

Métropole 12 septembre

Sujet

salut

EXERCICE N°8

Nlle Calédonie 14 novembre

Sujet

salut