EXERCICE N°1

Pondichéry 16 avril

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$,
on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.
On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA),
la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que
$BM' = 2OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a. Déterminer la forme algébrique de z_M.

b. Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.
Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement la propriété 1 et la propriété 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e. Montrer que $BM' = 2OI$.

Aide

EXERCICE N°2

Antilles Guyane 18 juin

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1+\mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : A et B des nombres réels
            K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                 Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
    Affecter à B la valeur B/3
FinPour
Afficher A
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n,
et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ?
En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).

3. **a.** On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{3}$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.
En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Aide

EXERCICE N°3
Nouvelle Calédonie 14 novembre

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.

2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha)$.

4. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
Proposition : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.

Aide

EXERCICE N°4

Amérique du Sud 21 novembre

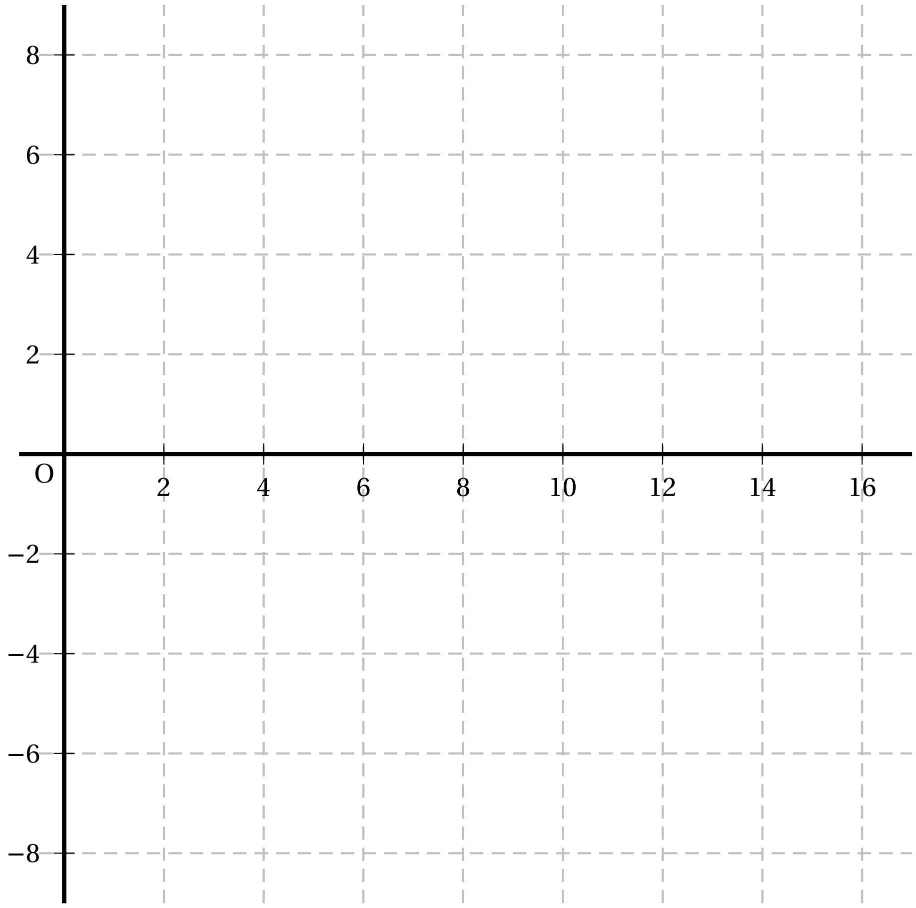
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.

- **a.** Vérifier que z_1 est une solution de (E).
- **b.** Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
- **c.** Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.



3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)$.

4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $\ell^n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

- **a.** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell^n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.
- **b.** Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell^n \geqslant 1\,000$.

Aide

AIDE

EXERCICE N°1

Pondichéry 16 avril

Sujet

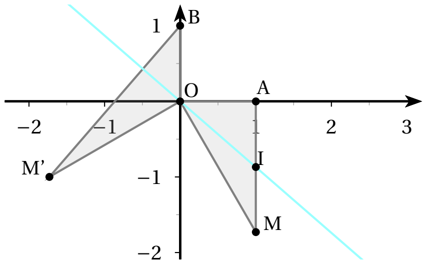
1. **a.** $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 \times \left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right) = 1 - i\sqrt{3}$ *Forme exponentielle*

$z_{M'} = -iz_M = -\sqrt{3} - i$

$|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ *Module*

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta = -\frac{5\pi}{6}$$ *Argument*

b.



2. $z_M = x + iy \quad z_A = 1 \quad z_B = i$

a. I est le milieu de [AM] donc $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \dfrac{x+1}{2} + i\,\dfrac{y}{2}$ *Milieu d'un segment*

b. $z_{M'} = iz_M = y - i\,x$.

c. $I\left(\dfrac{x+1}{2}\ ;\ \dfrac{y}{2}\right) \quad B(0\ ;\ 1) \quad M'(y\ ;\ -x)$.

d. $\overrightarrow{OI}\left(\dfrac{x+1}{2}\ ;\ \dfrac{y}{2}\right)$

$\overrightarrow{BM'}\left(y, -x-1\right)$

$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = \left(\dfrac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\dfrac{y}{2}\right) \times (-x-1) = 0.$

e.
- $2 \times OI = 2\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ *Longueur d'un segment*
- $BM' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

EXERCICE N°2

Antilles Guyane 18 juin

Sujet

1. $z_0 = 1 + \mathrm{i}$

$a_0 = 1$
$b_0 = 1$

2. $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{3} = \dfrac{1 + \mathrm{i} + \sqrt{1^2 + 1^2}}{3} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

$a_1 = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}$
$b_1 = \dfrac{1}{3}$

3. **a.** Pour $N = 2$:

K	A	B
1	0,804 7	0,333 3
2	0,558 6	0,111 1

b. Pour N donné, l'algorithme affiche la valeur de a_N.

Partie B

1. $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3} = \dfrac{a_n + \mathrm{i}b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} + \mathrm{i}\dfrac{b_n}{3}$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$
$b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}$

2.
- $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n$ *Suite géométrique*

  Donc, (b_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$
  et de premier terme $b_0 = 1$.
- $b_n = b_0 \times q^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ *Limite d'une suite*

3. **a.** $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{z_n + |z_n|}{3}\right| = \dfrac{1}{3}\left|z_n + |z_n|\right| \leqslant \dfrac{1}{3}\left(|z_n| + \left||z_n|\right|\right)$

Donc, $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{3}$

b. • $\begin{cases} u_0 = |z_0| = \sqrt{2} \\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{3} \end{cases}$ • $\begin{cases} P_n : u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} \\ P_0 : u_0 \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} \\ P_{n+1} : u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2} \end{cases}$

— *Initialisation* : *Démonstration par récurrence*

$u_0 = \sqrt{2}$

Or, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Donc $u_0 \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2}$

Ainsi, P_0 est vraie.

— *Hérédité* :

On suppose que P_n est vraie : $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

Montrons que P_{n+1} est vraie : $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} &\Longleftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right) \times u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} \\ &\Longleftrightarrow \frac{2u_n}{3} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Or, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{3}$

Donc $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

— *Conclusion* :

Par le principe de récurrence, P_n est vraie : $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

$u_n = |z_n| \geqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ *Limite d'une suite*

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ $\big($théorème des "gendarmes"$\big)$

c. $u_n = |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{a_n^2}$

Or, $\sqrt{a_n^2} = |a_n| \geqslant 0$

Donc $0 \leqslant |a_n| \leqslant u_n$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ $\big($théorème des "gendarmes"$\big)$

Exercice n°3

Nouvelle Calédonie 14 novembre

Sujet ■

salut

Exercice n°4

Amérique du Sud 21 novembre

Sujet ■

salut