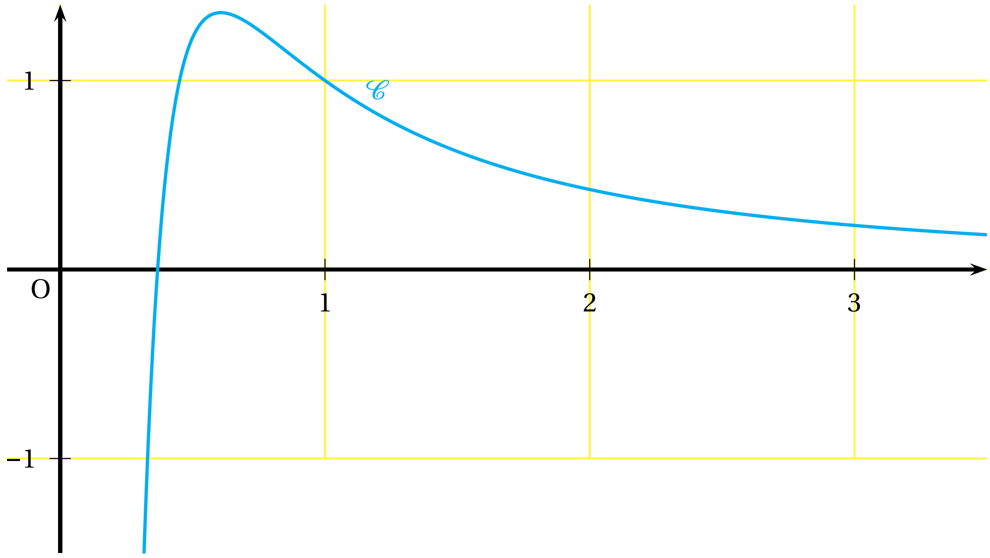
Exercice n°3

Amérique du Nord 30 mai

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$$

b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire exprimée en unités d'aires du domaine délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de n.

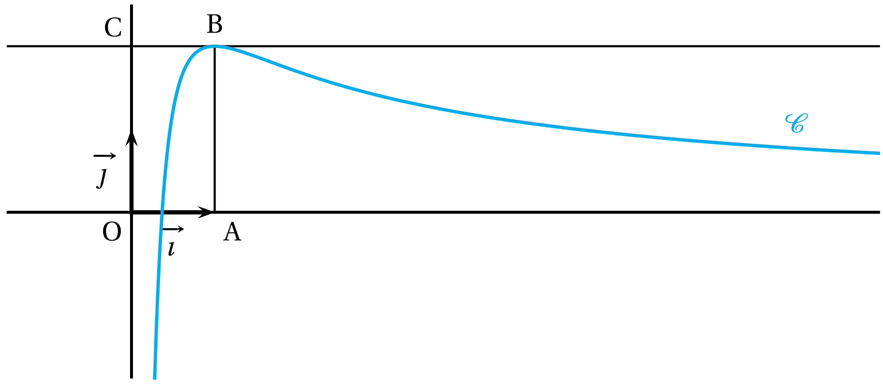
c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Aide

Exercice n°8

Métropole 20 juin

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1 , 0)$, $(1 , 2)$, $(0 , 2)$;

— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;

— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0 , 1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Aide

AIDE

EXERCICE N°3

Amérique du Nord 30 mai

Sujet

1. **a.** $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ *Limites de $f(x)$*

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 1+\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2=0^+\end{array}\right. \xRightarrow{\text{par quotient}} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=-\infty$$

b. $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{1}{x}$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right. \xRightarrow{\text{par produit}} \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right. \xRightarrow{\text{par somme}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$$

c. *Asymptotes*

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=-\infty \Longrightarrow x=0$ asymptote verticale à $\mathscr{C}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Longrightarrow y=0$ asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. **a.** $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

f est du type $\dfrac{u}{v}$

dont la dérivée est $f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ *Dérivée $f'(x)$*

donc $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\times(1+\ln(x))}{(x^2)^2}=\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$

b.

- $-1-2\ln x>0 \Longleftrightarrow x<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$
- $x\in\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-0,5}\right[\ :\ f'(x)>0$
  $x\in\left]\mathrm{e}^{-0,5}\,;\,+\infty\right[\ :\ f'(x)<0$

c. *Sens de variation de f*

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	↘	0

3. **a.** $f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\mathrm{e}^{-1}$

$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{-1}\,;\,0\right)$

b. *Signe de f(x)*

$x\in\left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[\ :\ f(x)>0$

$x\in\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[\ :\ f(x)<0$

4. **a.** $\mathrm{e}^{-1}<x\leqslant 2 \Longleftrightarrow f(\mathrm{e}^{-1})<f(x)\leqslant f(2)$ car f est croissante

$\Longleftrightarrow 0<f(x)\leqslant\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

Donc : $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{2} 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{2}\frac{\mathrm{e}}{2}\,\mathrm{d}x$

D'où : $0\leqslant I_2\leqslant \mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$.

b. $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$

$I_n = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{n} f(x)\,dx = F(n) - F\left(e^{-1}\right) = \ldots = e - \frac{\ln n}{n} - \frac{2}{n}$ *Intégrale*

c.

- $\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} e = e \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 \end{array}\right. \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_n = e$
- L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°8

Métropole 20 juin

Sujet

salut