EXERCICE N°1

Polynésie 7 juin

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Chaque réponse correcte rapporte 1 *point.*
Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

a. $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ **b.** $\sqrt{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ **c.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ **d.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

a. une solution

b. deux solutions

c. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

d. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1~;~2~;~3)$, $B(-1~;~5~;~4)$ et $C(-1~;~0~;~4)$.
La droite parallèle à (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = 3t \\ z = t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \\ z = 4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $D(-1~;~2~;~3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3~;~-5~;~1)$,

et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t-7 \\ y = t+3 \\ z = 2t+5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

b. La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.

c. La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

d. La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Aide

EXERCICE N°2

Asie 19 juin

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée.
Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2\mathrm{i}, \quad b = -\sqrt{3}+\mathrm{i}, \quad c = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{et} \quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.

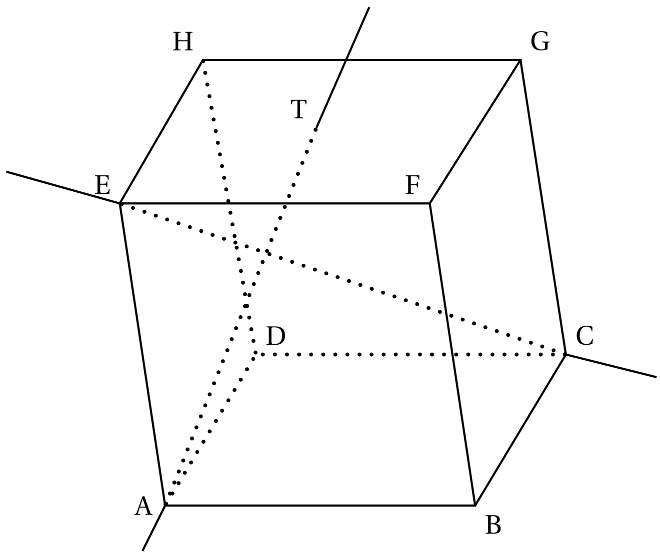
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

Affirmation 3 : la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-t \\ y &=& 6-2t \\ z &=& -2+t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$,

coupe le plan (IJK) au point $\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

Aide

EXERCICE N°3

Métropole 20 juin

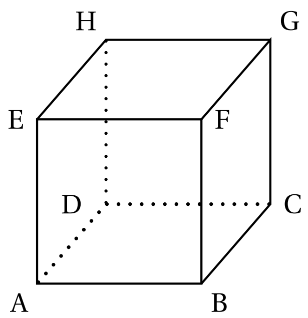
Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ est une droite.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

3. Soit ABCDEFGH un cube.

   Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+y+3z+4=0$.
   On note S le point de coordonnées $(1, -2, -2)$.
   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1+3t \end{array}\right., t \in \mathbf{R}$.

Aide

EXERCICE N°4

Métropole 12 septembre

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.
Il est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

La droite $\mathcal{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5-2t \\ y & = & 1+3t \\ z & = & 4 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.

- **a.** La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
- **b.** La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
- **c.** La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

2. On note $\mathcal{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

- **a.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
- **b.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.
- **c.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\text{i}| = |z-\text{i}|$.

- **a.** $\mathcal{E}$ est l'axe des abscisses.
- **b.** $\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées.
- **c.** $\mathcal{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

- **a.** Le triangle OBC est isocèle en O.
- **b.** Les points O, B, C sont alignés.
- **c.** Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

Aide

AIDE

EXERCICE N°1

Polynésie 7 juin

Sujet

d - c - a- b

1. (d)

$$\mathrm{i} \times \frac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \frac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$$

2. (c)

$-z = \overline{z} \iff -(x+\mathrm{i}y) = x - \mathrm{i}y \iff x = 0$

3. (a)

A$(1\,;\,2\,;\,3)$

B$(-1\,;\,5\,;\,4)$

C$(-1\,;\,0\,;\,4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-2\,;\,3\,;\,1)$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2t-1 \\ y &=& 3t \\ z &=& t+4 \end{array}\right. \quad \text{passe par } (-1\,;\,0\,;\,4)$$

$\overrightarrow{u}\,(-2\,;\,3\,;\,1) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

4. (b)

① $\mathscr{P}$ passe par le point D$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(3\,;\,-5\,;\,1)$.

② $$\Delta\ :\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t-7 \\ y &=& t+3 \\ z &=& 2t+5 \end{array}\right. \quad \text{passe par } (-7\,;\,3\,;\,5)$$

$\overrightarrow{u}\,(1\,;\,1\,;\,2)$

① ② $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 3-5+2 = 0$.

Donc Δ et $\mathscr{P}$ sont parallèles.

De plus D$(-1\,;\,2\,;\,3)$ n'est pas un point de Δ.

En effet $\left\{\begin{array}{l} -1 = t-7 \\ 2 = t+3 \\ 3 = 2t+5 \end{array}\right.$ ne donne pas une valeur unique de t.

Ainsi, Δ et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles.

EXERCICE N°2
Asie 19 juin
Sujet

$a = 2 + 2\text{i}$
$b = -\sqrt{3} + \text{i}$
$c = 1 + \sqrt{3}\text{i}$
$d = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$
$e = -1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{i}$

1. Affirmation 1 : vraie. *Affixe et alignement de points*

$b - a = -\sqrt{3} - 2 - \text{i}$
$c - a = -1 + \left(\sqrt{3} - 2\right)\text{i}$

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{-1 + \left(\sqrt{3}-2\right)\text{i}}{-\sqrt{3}-2-\text{i}}\\ &= \frac{\left(-1 + \left(\sqrt{3}-2\right)\text{i}\right) \times \left(-\sqrt{3}-2+\text{i}\right)}{\left(-\sqrt{3}-2-\text{i}\right) \times \left(-\sqrt{3}-2+\text{i}\right)}\\ &= \ldots\\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Donc $c - a = \left(2 - \sqrt{3}\right)(b - a)$
c'est-à-dire $\overrightarrow{AC} = \left(2 - \sqrt{3}\right)\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont colinéaires,
donc les points A, B et C sont alignés.

2. Affirmation 2 : fausse. *Module et longueur d'un segment*

- $\text{BE} = |e - b|$
  Or, $e - b = \left(-1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{i}\right) - \left(-\sqrt{3} + \text{i}\right) = -1 + \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right)\text{i}\right)$
  Donc $\text{BE} = \sqrt{\left(-1 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{8}$
- $\text{CE} = |e - c|$
  Or, $e - c = -1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{i} - \left(1 + \sqrt{3}\text{i}\right) = -2 + 2\text{i}$
  Donc $\text{CE} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
- $\text{DE} = |e - d|$
  Or, $e - d = -1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{i} - \left(-1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = \left(2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{i}$
  Donc $\text{DE} = \sqrt{0^2 + \left(2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  Les points B, C et D ne sont pas équidistants de E car BE≠DE.

3. Affirmation 3 : vraie. *Intersection d'une droite et d'un plan*

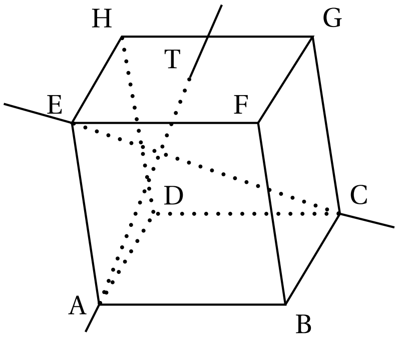
- Équation du plan (IJK) :
  (IJK) : $ax + by + cz + d = 0$
  $\text{I}(1\,,\,0\,,\,0) \in (\text{IJK})$: $a + d = 0$
  $\text{J}(0\,,\,1\,,\,0) \in (\text{IJK})$: $b + d = 0$
  $\text{K}(0\,,\,0\,,\,1) \in (\text{IJK})$: $c + d = 0$
  Donc $a = b = c = -d$
  d'où (IJK) : $ax + ay + az - a = 0 \iff a(x + y + z - 1) = 0$
  Ainsi (IJK) : $x + y + z - 1 = 0$
- Équation de $\mathscr{D}$:
  $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2 - t\\ y &=& 6 - 2t\\ z &=& -2 + t\end{array}\right.$$

Point d'intersection de (IJK) et $\mathscr{D}$

$2 - t + 6 - 2t - 2 + t - 1 = 0 \iff t = \dfrac{5}{2}$

Le point commun a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

4. **Affirmation 4** : vraie. *Droites orthogonales*



Soit le repère $\left(\mathrm{A},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$

A$(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ E$(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$

T$(0,5\ ;\ 0,5\ ;\ 1)$ C$(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\ (0,5\ ;\ 0,5\ ;\ 1)$ $\overrightarrow{\mathrm{EC}}\ (1\ ;\ 1\ ;\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EC}} = 0$: $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ sont orthogonaux.

Donc, (AT) et (EC) sont orthogonales.

EXERCICE N°3

Métropole 20 juin

Sujet

salut

EXERCICE N°4

Métropole 12 septembre

Sujet

salut