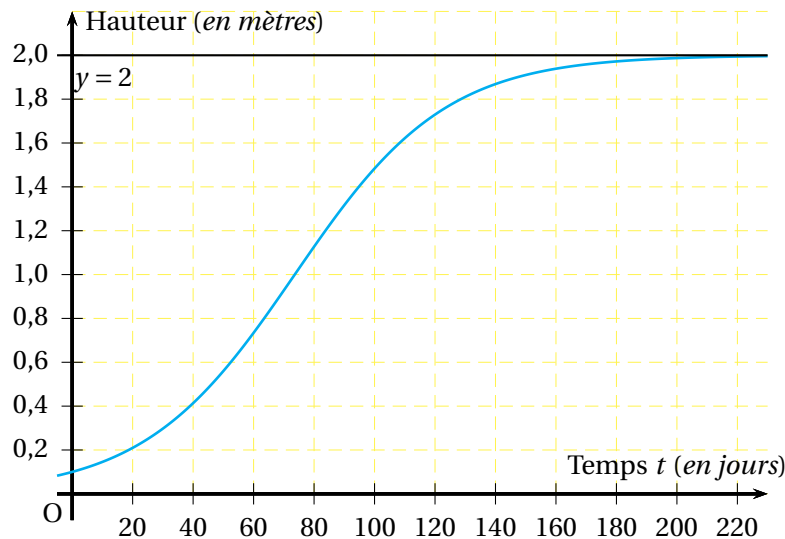


EXERCICE N°1

Pondichéry 16 avril

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-après représente cette évolution.



La hauteur est en mètres et le temps en jours. On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par $f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 250]$.
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.
3. a. Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; 250]$ on a

$$f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}.$$

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 250]$ par

$$F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$$
 est une primitive de la fonction f .

- b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50; 100]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.
4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f . En utilisant le graphique, déterminer une valeur approchée du temps t pour laquelle la vitesse de croissance est maximale. Estimer alors la hauteur du plant.

EXERCICE N°2

Liban 28 mai

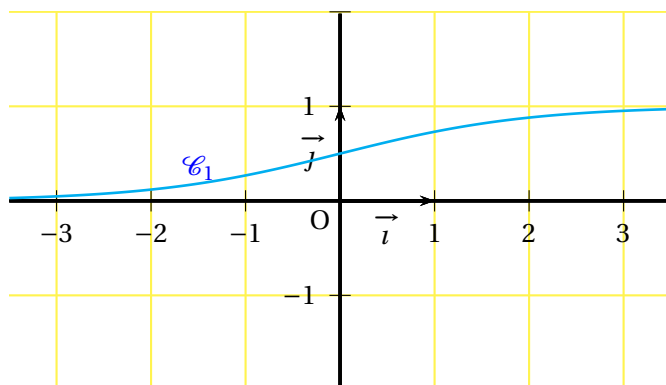
Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}. \text{ Le plan est muni d'un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

La représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est donnée ci-dessous.



- Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
- On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur \mathbb{R} . Calculer, pour tout réel x , $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .
- On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x) dx$.
Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$.

On souhaite tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de \mathcal{C}_1 d'abscisse x et M le point de \mathcal{C}_{-1} d'abscisse x .

On note K le milieu du segment $[MP]$.

- Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
- En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
- Tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} sur le graphique ci-dessus.
- En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_{-1} l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

- Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
- Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.
- Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

EXERCICE N°3

Polynésie 7 juin

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.**1.** Étude de la fonction f .

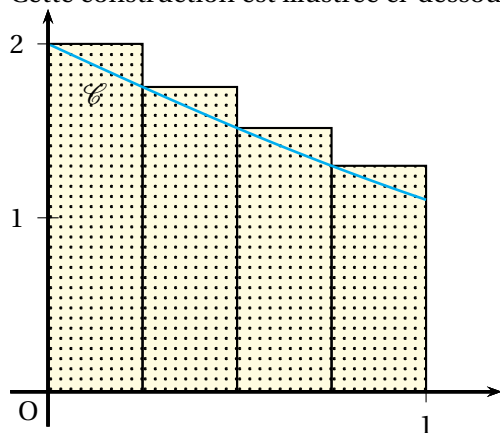
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec les axes du repère.
- Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe \mathcal{C} .
- Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.On note \mathcal{D} le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.On approche l'aire du domaine \mathcal{D} en calculant une somme d'aires de rectangles.

- Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4} ; 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.

L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine \mathcal{D} en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

- Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = (-x - 3)e^{-x}.$$

On admet que g est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

- a.** Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire.
- b.** Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant \mathcal{A} par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

Aide ●

EXERCICE N°4

Centres étrangers 12 juin

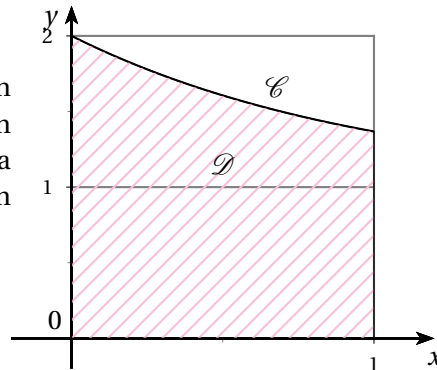
On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = 1 + e^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $g(x) > 0$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et \mathcal{D} le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} , d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

La courbe \mathcal{C} et le domaine \mathcal{D} sont représentés ci-contre.



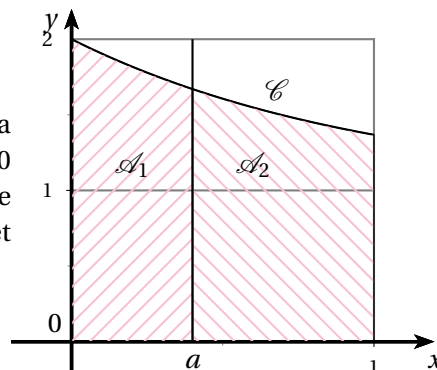
Le but de cet exercice est de partager le domaine \mathcal{D} en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq 1$.

On note \mathcal{A}_1 l'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , l'axe (Ox) , les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis \mathcal{A}_2 celle du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.

\mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont exprimées en unités d'aire.



1.
 - a. Démontrer que $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.
 - b. Exprimer \mathcal{A}_2 en fonction de a .
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}.$$

- a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
 - b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0 ; 1]$ en un réel α . Donner la valeur de α arrondie au centième.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine \mathcal{D} en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \frac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel b .

Aide ●

EXERCICE N°5

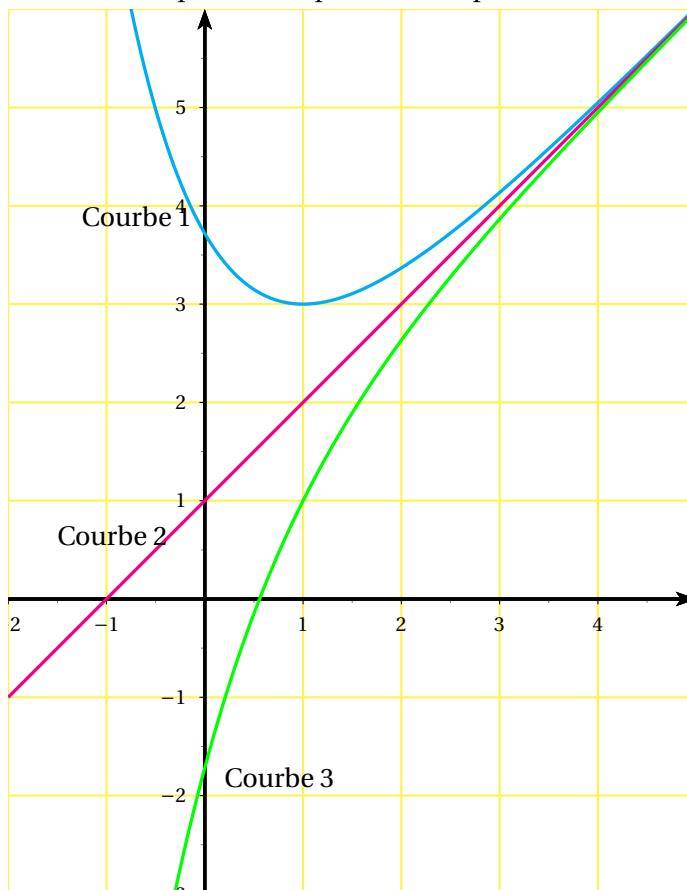
Antilles Guyane 18 juin

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.**Partie A**Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} telle que : $f(x) = (x+1)e^x$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} . Démontrer que $f'(x) = (x+2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Partie BOn définit la fonction g_m sur \mathbb{R} par : $g_m(x) = x+1 - me^{-x}$ et on note \mathcal{C}_m la courbe de la fonction g_m dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1.
 - a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
 - b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
2. On a représenté les courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_e , et \mathcal{C}_{-e} .
(Obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).



Identifier chacune de ces courbes en justifiant.

3. Étudier la position de \mathcal{C}_m par rapport à \mathcal{D} d'équation $y = x+1$ suivant les valeurs de m .
4.
 - a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur la figure ci-dessus.
 - b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

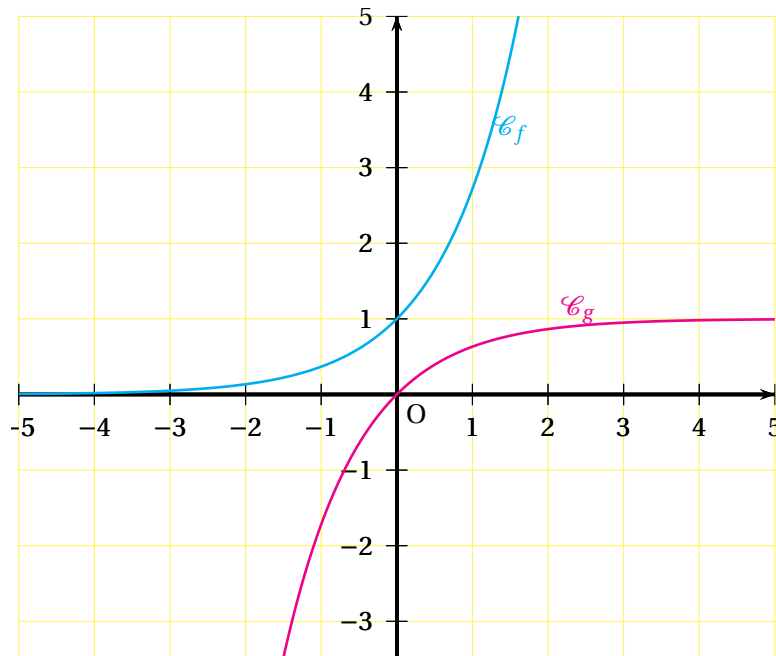
EXERCICE N°6

Asie 19 juin

Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , sont fournies ci-dessous.

**Partie A**

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes, Tracer au mieux ces tangentes sur la figure ci-dessus.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note \mathcal{D} l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B d'abscisse b .

1.
 - a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point A.
 - b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_g au point B.
 - c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$.

1.
 - a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
 - b. Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
 - c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur \mathbb{R} . Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2.
 - a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} .
 - b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive. À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B. On note E le point de \mathcal{C}_f d'abscisse α et F le point de \mathcal{C}_g d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à \mathcal{C}_g au point F.

EXERCICE N°7

Antilles Guyane 11 Septembre

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note \mathcal{C}_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par

$$f_1(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
En déduire que la courbe \mathcal{C}_1 admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur \mathbb{R} puis dresser son tableau de variation sur \mathbb{R} .
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que :

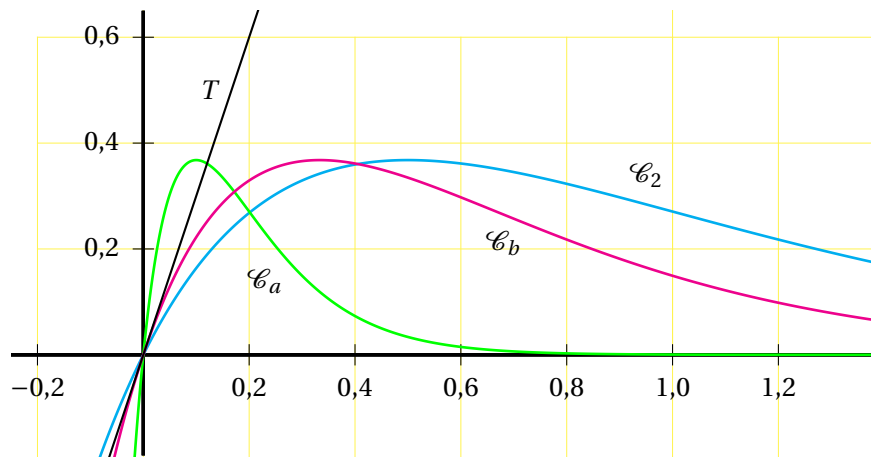
$$g_1(x) = -(x+1)e^{-x}$$

est une primitive de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .

4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .
5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C}_1 , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_b où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à \mathcal{C}_b au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes \mathcal{C}_k passent par un même point.
2. a. Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1 - kx)e^{-kx}.$$

- b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
- c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.
- d. Écrire une équation de la tangente à \mathcal{C}_k au point O origine du repère.
- e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b .

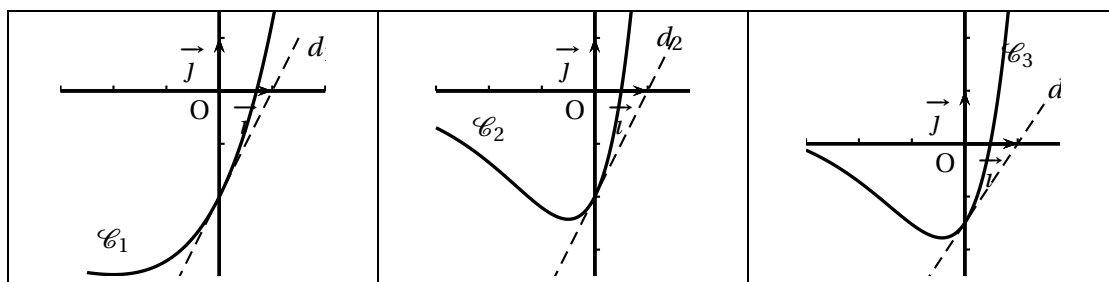
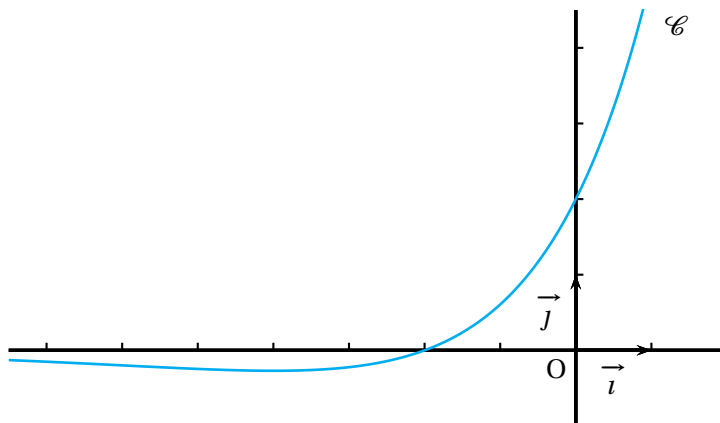
EXERCICE N°8

Métropole 12 septembre

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C} et trois autres courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - a. À l'aide de la courbe \mathcal{C} , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - b. L'une des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la partie A est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

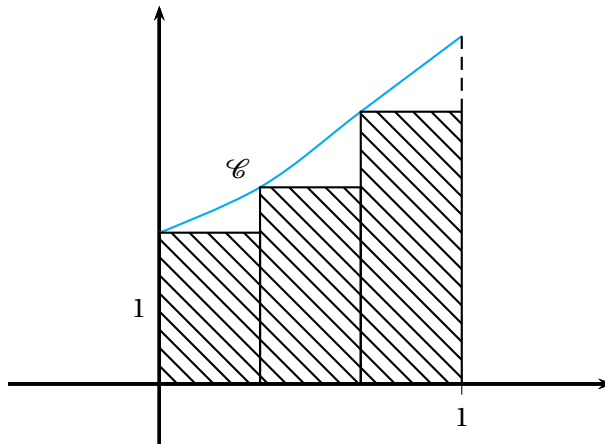
1. L'observation de la courbe \mathcal{C} permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
 - a. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.
 - b. En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$.
 - a. Interpréter géométriquement le réel I .
 - b. Soient u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$. Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.
 - c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Aide ●

EXERCICE N°9*Nouvelle Calédonie 14 novembre*

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

- a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g .

- b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703; 0,704[$.
- c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

- a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel
 $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.
- e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Aide ●

EXERCICE N°10*Amérique du Sud 21 novembre***Partie A**Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = xe^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f .
5. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} puis dresser le tableau de variation.

Partie BPour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur \mathbb{R} par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
2. Comparer les fonctions h_n et g'_n , g'_n étant la dérivée de la fonction g_n .
En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
En utilisant les résultats de la partie B, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Aide ●

AIDE

EXERCICE N°1

Pondichéry 16 avril

Sujet ■

Partie 1

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2 \iff \frac{a}{1 + be^{-0,04t}} = 2$$

$$\text{Or } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,04t} = 0, \text{ donc } a = 2.$$

$$\bullet h(0) = 0,1 \iff \frac{a}{1+b} = 0,1$$

$$\text{Or } a = 2, \text{ donc } b = 19.$$

Partie 2 : On a $f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$

1. $\bullet f$ est du type $\frac{u}{v}$

$$\text{dont la dérivée est } f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Dérivée $f'(x)$

$$\text{donc } f'(t) = \frac{0,76e^{-0,04t} \times 2}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}$$

$$\bullet f'(t) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante.}$$

Sens de variation de f

2. $f(t) > 1,5 \iff \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}} > 1,5$

$$\iff 2 > 1,5(1 + 19e^{-0,04t})$$

$$\iff \frac{\frac{2}{1,5} - 1}{19} > e^{-0,04t}$$

$$f(t) > 1,5 \iff t > \frac{\ln 57}{0,04}, \text{ c'est-à-dire } t \geq 101 \text{ jours.}$$

3. a. $\bullet f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}} \times \frac{e^{0,04t}}{e^{0,04t}}$$

Autre expression de $f(x)$

$$f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$$

$$\bullet \text{ On a } F(t) = 50 \times \ln(e^{0,04t} + 19).$$

F est du type $u \times v$ dont la dérivée est $F' = u'v + v'u$

 F primitive de f

et v est du type $\ln(w)$ dont la dérivée est $v' = \frac{w'}{w}$

$$\text{D'où } F'(t) = \frac{2e^{0,04t}}{1 + 19e^{0,04t}},$$

c'est-à-dire $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f .

b. $\mu = \frac{1}{100 - 50} \int_{50}^{100} f(t) dt$

Valeur moyenne de f

$$\mu = \frac{1}{100 - 50} [F(100) - F(50)]$$

$$\mu \approx 1,03.$$

4. \bullet La vitesse est maximale lorsque la pente est maximale, soit à $t = 80$.

\bullet La hauteur est d'environ égale à 1,15 m.

EXERCICE N°2

Liban 28 mai

Sujet ■

Partie A

1. • On a $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1.$$

Limites de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0.$$

- $y = 1$ et $y = 0$ sont deux asymptotes horizontales à \mathcal{C}_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x}$$

Autre expression de $f(x)$

$$f_1(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

3. On a $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

- f_1 est du type $\frac{u}{v}$

dont la dérivée est $f_1' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ donc $f_1'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Dérivée $f'(x)$

- $f_1'(x) > 0$ donc f_1 est strictement croissante.

Sens de variation de f

4. • On a $f_1(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

f_1 est du type $\frac{u'}{u}$

dont la primitive est $F_1 = \ln(u)$

donc $F_1(x) = \ln(1+e^x)$.

Primitive de f

$$I = \int_0^1 f_1(x) dx$$

Intégrale

$$I = F_1(1) - F_1(0)$$

$$I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

- I est l'aire délimitée par \mathcal{C}_1 , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

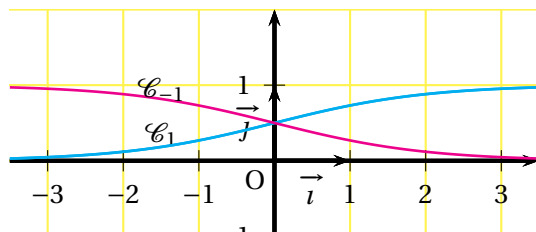
• $P \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow y_P = f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$

• $M \in \mathcal{C}_{-1} \Rightarrow y_M = f_{-1}(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1. $f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{1+e^x} = 1$

2. $y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \frac{1}{2}$

3. \mathcal{C}_{-1} et \mathcal{C}_1 sont symétriques par rapport à $y = \frac{1}{2}$



4. $\mathcal{A} = \int_0^1 (f_1(x) - f_{-1}(x)) dx$ *Intégrale*

Or $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1 \iff f_{-1}(x) = 1 - f_1(x)$

Donc $\mathcal{A} = \int_0^1 (2f_1(x) - 1) dx = 2 \times \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 1 dx = 2 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 1 \approx 0,24.$

Partie C

1. Vrai
2. Faux
3. Vrai

On a $f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}} > 0$

1. $0 < f_k(x) < 1$?

Encadrement de $f_k(x)$

$$e^{-kx} > 0 \implies 1 + e^{-kx} > 1 \implies \frac{1}{1 + e^{-kx}} < 1 \implies 0 < f_k(x) < 1.$$

2. Contre-exemple : f_{-1} est strictement décroissante.

3. $k \geq 10 \stackrel{?}{\implies} f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$

$$k \geq 10 \implies -\frac{1}{2}k \leq -5 \implies e^{-\frac{1}{2}k} \leq e^{-5} \implies \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}k}} \geq \frac{1}{1 + e^{-5}}$$

Or $\frac{1}{1 + e^{-5}} \approx 0,9933$ donc $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$

EXERCICE N°3

Polynésie 7 juin

Sujet ■

1. a. $f(x) = (x+2)e^{-x}$ *Intersection avec les axes*— Intersection avec l'axe des ordonnées : $x=0 \Rightarrow f(0)=2 \Rightarrow (0; 2)$ — Intersection avec l'axe des abscisses : $f(x)=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2; 0)$ **b.** • *Limite en $-\infty$:* *Limites de $f(x)$*

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{par composition}} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{par produit}} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• *Limite en $+\infty$:*

$$f(x) = (x+2)e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}} + \frac{2}{e^x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{par quotient}} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{par somme}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La droite d'équation $y=0$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.**c.** $f(x) = (x+2) \times e^{-x}$ • f est du type $u \times v$ dont la dérivée est $f' = u'v + v'u$ *Dérivée $f'(x)$* donc $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-1)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$ • $f'(x)$ est du signe de $-x-1$ *Signe de $f'(x)$ et variation de f*

x	$-\infty$	-1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	e		0

2. a.

S	0	$0 + 1/4 f(0/4) = 0,5$	$0,5 + 1/4 f(1/4) = 0,938$	$0,938 + 1/4 f(2/4) = 1,317$	$1,317 + 1/4 f(3/4) = 1,642$
k	-	0	1	2	3

b. Dans *Variables*, ajouter "N est un nombre entier"Dans *traitement* : - remplacer "Pour k variant de 0 à 3" par

"Pour k variant de 0 à N-1"

- remplacer "Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{3} f\left(\frac{k}{3}\right)$ " par"Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{N} f\left(\frac{k}{N}\right)$ "**3. a.** $g(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive de $f(x)$.*Intégrale*

$$\text{Donc : } \mathcal{A} = \int_0^1 f(t) dt = g(1) - g(0) = -4e^{-1} + 3$$

b. $(-4e^{-1} + 3) - 1,642 \approx 0,113$

EXERCICE N°4

Centres étrangers 12 juin

Sujet ■

Partie A : \mathcal{D} est scindé en deux par une droite verticale d'équation $x = a$.

$$g(x) = 1 + e^{-x}$$

$$1. \quad a. \quad \mathcal{A}_1 = \int_0^a g(x) dx = G(a) - G(0)$$

Intégrale

Or, $G(x) = x - e^{-x}$

Donc, $\mathcal{A}_1 = (a - e^{-a}) - (-1) = a + 1 - e^{-a}$

$$b. \quad \mathcal{A}_2 = \int_a^1 g(x) dx = G(1) - G(a) = (1 - e^{-1}) - (a - e^{-a}) = 1 - a + e^{-a} - e^{-1}$$

$$2. \quad a. \quad f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e} \implies f'(x) = 2 + 2e^{-x}$$

Dérivée $f'(x)$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante. *Signe de $f'(x)$ et variation de f*

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{1}{e} - 2$	$2 - \frac{1}{e}$

b. Sur $[0 ; 1]$:*Théorème des valeurs intermédiaires*

- f est continue.
- f est strictement croissante.
- 0 est compris entre $f(0) \approx -1,6$ et $f(1) \approx 1,6$.

Donc, d'après le (corollaire du) théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection), f s'annule une fois et une seule sur $[0 ; 1]$ en un réel α .

A la calculatrice : $0,452 < \alpha < 0,453$, donc $\alpha \approx 0,45$.

$$3. \quad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff a + 1 - e^{-a} = 1 - a + e^{-a} - e^{-1} \iff 2a - 2e^{-a} + e^{-1} = 0.$$

Donc, a est une solution de l'équation $f(x) = 0$ Ainsi, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ pour $a \approx 0,45$.**Partie B** : \mathcal{D} est scindé en deux par une droite horizontale d'équation $y = b$.

1. On remarque sur le graphique que l'aire totale est strictement inférieure à 2.

La moitié de l'aire est donc strictement inférieure à 1.

D'où $1 \times b < 1$

Donc $b < 1 < 1 + \frac{1}{e}$

2. D'après la partie A : la moitié de l'aire totale est donnée par $\frac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \frac{1}{2}(2 - e^{-1})$ D'après la partie B : la moitié de l'aire totale est égale à $1 \times b$

Ainsi, $b = \frac{1}{2}(2 - e^{-1})$

EXERCICE N°5

Antilles Guyane 18 juin

Sujet ■

Partie A

$$f(x) = (x+1)e^x = xe^x + e^x$$

1. • Limite en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \text{ par somme} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Limites de $f(x)$

- Limite en $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \text{ par produit} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f(x) = (x+1) \times e^x$

f est du type $u \times v$

dont la dérivée est $f' = u'v + v'u$

Dérivée $f'(x)$

donc $f'(x) = 1 \times e^x + (x+1) \times e^x = (x+2)e^x$

3. $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	0	$-e^{-2}$	$+\infty$

Partie B

1. a. $g_m(x) = x+1 - me^{-x}$:

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x+1 - me^{-x} = 0 \\ &\iff x+1 = me^{-x} \\ &\iff (x+1)e^x = m \\ &\iff f(x) = m \end{aligned}$$

- b. D'après le tableau de variation :

- $m = -e^{-2}$ ou $m \geq 0$: $f(x) = m$ admet une solution. Il en est de même pour l'équation $g_m(x) = 0$. Donc, \mathcal{C}_m coupe l'axe des abscisses en un point.
- $-e^{-2} < m < 0$: $f(x) = m$ admet deux solutions. Il en est de même pour l'équation $g_m(x) = 0$. Donc, \mathcal{C}_m coupe l'axe des abscisses en deux points.
- $m < -e^{-2}$: $f(x) = m$ n'admet aucune solution. Il en est de même pour l'équation $g_m(x) = 0$. Donc, \mathcal{C}_m ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. - Pour $m = 0$, $g_0(x) = x+1$ est une fonction affine.

Donc, la courbe 2 correspond à \mathcal{C}_0

- La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses : $m < -e^{-2}$.

Donc, $m = -e$.

- La courbe 3 coupe l'axe des abscisses en un point.

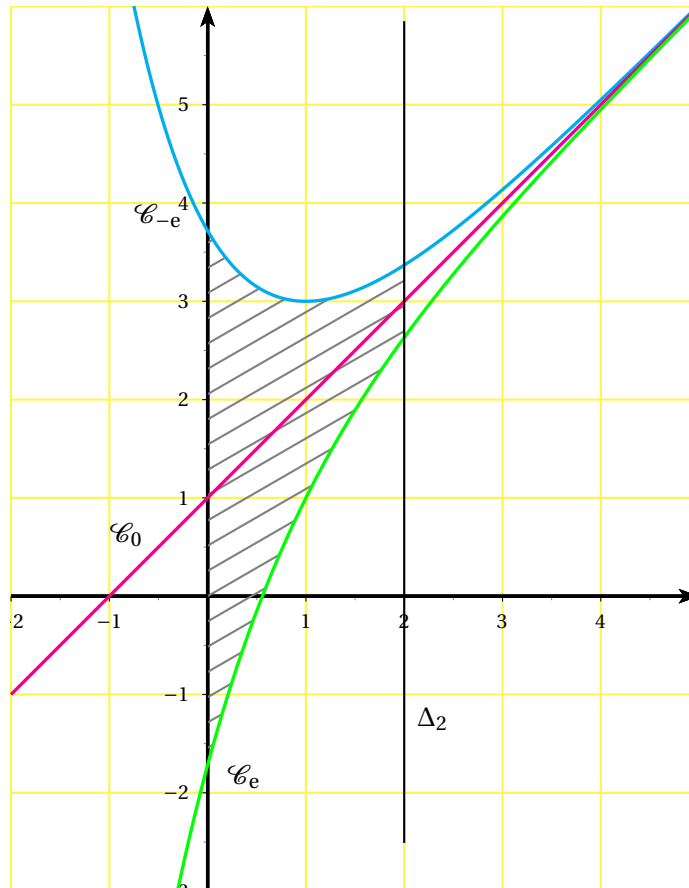
On vérifie que $m = e \geq 0$

3. $g_m(x) - (x+1) = -me^x$

Position d'une courbe par rapport à une droite

- $m > 0$: \mathcal{C}_m en dessous de \mathcal{D} .
- $m < 0$: \mathcal{C}_m au dessus de \mathcal{D} .

4. a. Domaine D_2 hachuré :



b. • $g_{-e}(x) = x + 1 + e^{-x}$ et $g_e(x) = x + 1 - e^{-x}$.

Intégrale

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) &= \int_0^a [g_{-e}(x) - g_e(x)] dx \\ &= \int_0^a 2e \times e^{-x} dx \\ &= 2e \times \int_0^a e^{-x} dx \\ &= 2e - 2e^{1-a} \end{aligned}$$

• $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{1-a} = 0$, donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(a) = 2e$.

EXERCICE N°6

Asie 19 juin

Sujet ■

Partie A

Voir la figure.

Partie B

1. a. $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$
Donc $f'(a) = e^a$

b. $g(x) = 1 - e^{-x} \implies g'(x) = e^{-x}$
Donc $g'(b) = e^{-b}$

c. $f'(a) = g'(b) \iff e^a = e^{-b} \iff b = -a$

2. $T_a : y = (x - a) \times f'(a) + f(a) \implies y = xe^a + e^a(1 - a)$

Tangente

$T_b : y = (x - b) \times g'(b) + g(b) \implies y = xe^{-b} + 1 - e^{-b} - be^{-b}$

$xe^a + e^a(1 - a) = xe^{-b} + 1 - e^{-b} - be^{-b}$

Or, $b = -a$.

Donc $e^a(1 - a) = 1 - e^a + ae^a$,

d'où : $2(a - 1)e^a + 1 = 0$

Partie C

1. a. $\varphi(x) = 2(x - 1)e^x + 1 = 2xe^x - 2e^x + 1$

• Limite en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \end{cases} \text{ par somme} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 1$$

Limites de $f(x)$ • Limite en $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x - 1)e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{cases} \text{ par somme} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

b. $\varphi(x) = 2xe^x - 2e^x + 1$

$\varphi'(x) = 2 \times e^x + 2x \times e^x - 2e^x = 2xe^x$

Dérivée $f'(x)$

$\varphi'(x)$ est du signe de $2x$:

Signe de $f'(x)$ - Sur $] -\infty ; 0[$: $\varphi'(x) < 0$

- Sur $]0 ; +\infty[$: $\varphi'(x) > 0$

c.

Variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	1		$+\infty$
		-1	

2. a. - Sur $] -\infty ; 0[$:

Théorème des valeurs intermédiaires

• φ est continue.• φ est croissante.• 0 est compris entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 1$ et $\varphi(0) = -1$.

Donc, d'après le (corollaire du) théorème des valeurs intermédiaires

(ou théorème de la bijection), l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α .

- Sur $]0 ; +\infty[$: de même, on montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β .

- Sur \mathbb{R} : on conclut que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

- b. $-1,679 < \alpha < -1,678$ donc $\alpha \approx -1,68$
 $0,768 < \alpha < 0,769$ donc $\beta \approx 0,77$

Partie D

1. • Équation de la tangente en α :

$$T_\alpha : y = (x - \alpha) \times f'(\alpha) + f(\alpha)$$

$$y = (x - \alpha) \times e^\alpha + e^\alpha$$

$$y = e^\alpha x - \alpha e^\alpha + e^\alpha$$

$$\text{Or, } \varphi(\alpha) = 0 \iff 2(\alpha - 1)e^\alpha + 1 = 0 \iff e^\alpha = \frac{-1}{2(\alpha - 1)}$$

$$\text{Donc } T_\alpha : y = \frac{-1}{2(\alpha - 1)}x + \frac{1}{2}$$

- Équation de la droite (EF) :

$$(EF) : y = mx + p$$

$$E(\alpha ; e^\alpha)$$

$$F(-\alpha ; 1 - e^\alpha)$$

$$m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{(1 - e^\alpha) - (e^\alpha)}{-\alpha - \alpha} = \frac{1 - 2e^\alpha}{-2\alpha} = \frac{1 - 2 \times \frac{-1}{2(\alpha - 1)}}{-2\alpha} = \frac{-1}{2(\alpha - 1)}$$

$$E \in (EF) \iff y_E = mx_E + p$$

$$\text{d'où } p = e^\alpha - \left(\frac{-1}{2(\alpha - 1)} \right) \alpha = \frac{-1}{2(\alpha - 1)} + \frac{\alpha}{2(\alpha - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$(EF) : y = \frac{-1}{2(\alpha - 1)}x + \frac{1}{2}$$

La droite (EF) est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse α .

2. Équation de la tangente en $-\alpha$:

$$T_{-\alpha} : y = (x - (-\alpha)) \times g'(-\alpha) + g(-\alpha)$$

$$y = (x + \alpha) \times e^\alpha + 1 - e^\alpha$$

$$y = e^\alpha x + \alpha e^\alpha - e^\alpha + 1$$

...

$$y = \frac{-1}{2(\alpha - 1)}x + \frac{1}{2}$$

La droite (EF) est tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $-\alpha$.

EXERCICE N°7*Antilles Guyane 11 septembre*

Sujet ■

salut

EXERCICE N°8*Métropole 12 septembre*

Sujet ■

salut

EXERCICE N°9*Nouvelle Calédonie 14 novembre*

Sujet ■

salut

EXERCICE N°10*Amérique du Sud 21 novembre*

Sujet ■

salut